ΑΣΚΗΣΕΙΣ

. Αν f συνεχής στο 2 και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x^2}{x-2}=1$, να βρείτε την $f'(2)$

. Αν $g'(0)=g(0)=0$ και $f(x)=\begin{cases} g(x)\sigma\upsilon\nu\dfrac{4}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$, να βρείτε το $f'(0)$

. Αν $f'(1)=1$ και $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ για κάθε $x\,,\,y>0$, να δείξετε ότι :

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

. Αν f πολυώνυμο με $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+1}=1$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}\in\mathbb{R}$.
Να εξετάσετε αν η $g(x)=\sqrt{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

. Έστω ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν :
$|f(x)|\leq|\eta\mu x|$ και $f^3(x)+f(x)-2=(x-1)^2\cdot f(x)$, να δείξετε ότι :
i) $f(1)=1$ ii) $|f(x)-1|\leq(x-1)^2$ για $x\in\mathbb{R}$ iii) $f'(1)=0$

. i) Έστω ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει : $f(x+y)=f(x)+f(y)$.
Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
ii) Έστω ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει : $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ $\big(f(0)\neq 0\big)$.
iii) Έστω ότι για κάθε $x\,,\,y>0$ ισχύει ότι : $f(xy)=f(x)+f(y)$ και $f'(1)=1$,
να δείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$

. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 να δείξετε ότι :

i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}=3\cdot f'(x_0)$

ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x_0-h)-f^2(x_0)}{h}=-2\cdot f(x_0)f'(x_0)$

. Έστω ότι για $x\in\mathbb{R}$ ισχύει : $f(x)(x-1)=g(x)\eta\mu(\pi x)+x^2-x$ με $f(1)=1$,

$g(1)=0$, $f'(1)=\pi+1$. Να δειχθεί ότι g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

• Να βρεθούν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η $f(x)=\begin{cases}\alpha x^3 & x\le 1\\ x+\beta & x>1\end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

• Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=1$ να δειχθεί ότι $f'(0)=1$.

• Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ με $f(0)=-g(0)$.
Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει : $f(x)+g(x)\le 2x$, να δειχθεί ότι $f'(0)+g'(0)=2$

• Αν $f(x)=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu(2\eta\mu x)}$ να εξεταστεί αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

• Αν η f , g παραγωγίσιμες στο $x_0\in\mathbb{R}$ να δειχθεί ότι :

i) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)$

ii) $f(x_0)-x_0f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$ (Π.Ε)

• Οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο α και $f(x)=g(x)|x-\alpha|$.
Να δειχθεί ότι ο α είναι ρίζα της g.

• Έστω ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x)\ge|x|$ και $f(0)=0$. Να δειχθεί ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

• Αν η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f(1)=-1$, να δειχθεί ότι η συνάρτηση
$g(x)=|f(x)|$ είναι παραγωγίσιμη στο 1.

• Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)-1\right)\right]=1$, να δείξετε
ότι $f'(0)=1$.

Έστω f συνεχής στο $x_0 = 0$ όπου για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $(x^2+1)f^{\nu}(x) + f(x) = x^{\nu}$, με ν περιττό φυσικό $(\nu \geq 3)$. Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

i) Να δείξετε ότι η $g(x) = x|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο α να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο α.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Δείξτε ότι :

i. Αν f άρτια τότε η f΄ είναι περιττή.
ii. Αν f περιττή τότε η f΄ είναι άρτια.
iii. Αν για $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = x^5 + x$ να δειχθεί ότι η f δεν είναι περιττή.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^3 + 5x^2 + \eta\mu 3x$ ii. $f(x) = \sqrt{x^4+2} + \sigma\upsilon\nu(x^2+1)$ iii. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

iv. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2(\eta\mu x) + (x^3+1)^4$ v. $f(x) = (x^4 + 2x)\eta\mu x$

vi. $f(x) = \varepsilon\varphi^2 x + \sqrt[3]{x^2+1}$

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{\ln x}{x} + e^{-x}$ ii. $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$ iii. $f(x) = x\ln x + e^{\sqrt{x}}$

iv. $f(x) = \eta\mu^3 x + e^{\sigma\upsilon\nu x}$ v. $f(x) = \frac{x+1}{x} + \frac{1}{\ln x}$ vi. $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \sigma\varphi x$

Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^{-x} + 2^x$ ii. $f(x) = (x^2+1)^x + a^{\eta\mu x}$ iii. $f(x) = x^{\frac{1}{x}} + \ln(\ln x)$

iv. $f(x) = x^a + a^a + x^x + a^x$ v. $f(x) = \ln^2(e^x + 1)$ vi. $f(x) = x^2 t^2 + e^{tx} + x + t$

Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

i. $f(x) = g(x^2+1) + g(e^x)$ ii. $f(x) = g^2(g(x)) + g(\varepsilon\varphi x)$

iii. $g(x) = f^2\left(\frac{1}{x}\right) + f(e^t)$ iv. $g(x) = f(\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x) + \frac{f(-x)}{x}$

v. $g(x) = f(e^x - e^{-x}) + f(\ln x)$ vi. $g(x) = (f(x))^x + x^{f(x)}$

. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) = 1 - \dfrac{2}{e^{f(x)}+1}$

Να δείξετε ότι $f'(x) = 0$.

. Βρείτε πολυώνυμο f(x) ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει :

α) $f(x) - f'(x) = x^2 - 2x$ β) $f(x) - f'(x) = x^3 - 3x^2$

. α) Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ όπου $f(x^3) = e^{-x}$ για $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθούν

οι αριθμοί $f'(1)$ και $f'(-2)$.

β) Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ όπου $f(e^x) = e^{3x}$ για $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν

οι αριθμοί $f'(e)$ και $f''(1)$.

. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $A = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το σύνολο τιμών $f(A)$.

β) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(A)$, να δείξετε ότι $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

. Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να βρείτε την παράγωγο των:

i. $g(x) = f(\sigma\upsilon\nu^2 x) + \sigma\upsilon\nu^2 f(x)$ ii. $\phi(x) = \left(f(e^{-x})\right)^5$ iii. $h(x) = f^3(f(xt))$.

. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = 1$ και για κάθε

$x, y \in \mathbb{R}^*$ είναι $f(xy) = yf(x) + xf(y)$. Να δειχθεί ότι : i. $f'(1) = 1$

ii. Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = 1 + \dfrac{f(x)}{x}$

. Να βρείτε πολυώνυμο f(x) βαθμού $\nu \in \mathbb{N}^*$ ώστε $\left(f'(x)\right)^2 = 4f(x)$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

. Έστω f πολυωνυμική συνάρτηση που δε τέμνει τον x΄x και για την οποία

ισχύει $\left(f'(x)\right)^4 = \left(f(x)\right)^3$, να δείξετε ότι είναι 4^{ου} βαθμού και ότι η

συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

. Έστω συνάρτηση g' συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $g'(0)>0$, για την οποία ισχύει $\left(g'(x)\right)^2\left(x^2+1\right)=1$ για $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=g^{-1}(x)$, να δείξετε ότι $f''=f$.

. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f^3(x)+3f(x)=x-1 \quad \text{για} \quad x\in\mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να λυθεί η εξίσωση $f''(x)=0$.

β) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-2f(1)+f(1-h)}{h^2}$.

. Έστω f παραγωγίσιμη στο $A=(0,+\infty)$ όπου ισχύει : $f\left(x^2\right)+f(x)=3\ln x+2$.

Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-1}{x-1}$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)e^x-e}{x-1}$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)e-f(1)e^x}{x-1}$

. Να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x)=\begin{cases} x^3, x\le 1 \\ \sqrt{x}, x>1 \end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases} \text{ημ}x, x\le 0 \\ \text{συν}x, x>0 \end{cases}$ iii. $f(x)=\begin{cases} x^4, x<0 \\ \text{ημ}x, x\ge 0 \end{cases}$

. Έστω ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει :

$$\left|g(x)-g(y)\right|\le\left(f(x)-f(y)\right)^2 \quad \text{και} \quad f(x)=\lim_{t\to\pm\infty}\left[t\left(f\left(x+\frac{1}{t}\right)-f(x)\right)\right]$$

Να δείξετε ότι για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει : i) $f'(x_0)=f(x_0)$ ii) $g'(x_0)=0$

. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x$. Να βρεθούν αν υπάρχουν εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f έτσι ώστε να είναι :

i. Παράλληλες με τον άξονα x΄x.
ii. Παράλληλες με την ευθεία 9x – y + 1 = 0
iii. Κάθετες στην ευθεία x – 3y = 0.

___. α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης
της συνάρτησης $f(x) = 2\ln(x-3) - 5$ που είναι κάθετες.

β) Να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ όπου :

i. είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $2y - x + 5 = 0$.

ii. διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

___. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της $f(x) = e \cdot \ln x$ στο $x_0 = e$ εφάπτεται στην συνάρτηση $g(x) = e^{\frac{x}{e}}$.

___. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της $f(x) = ημx$, $x \in [0, \pi]$ στα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

___. Αν η ευθεία $ε: y = 4x$ εφάπτεται της f στο $x_0 = 1$, να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f^2(x) - 16}{x - 1}$ και η εφαπτομένη της $g(x) = f(e^x + x - e)$ στο $x_0 = 1$.

___. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.
Αν η $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον $x΄x$ στο $A(1,0)$ δείξτε ότι η εφαπτομένη της g στο A είναι κάθετη στην ευθεία $y = -x$.

___. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει $f(2-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ τότε :

i) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$

ii) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ στο $A(1,0)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$.

___. Έστω η παραγωγίσιμη $g: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$. Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη της $f(x) = (1 + g(x))^x$ στο $M(0, f(0))$ σχηματίζει με τον $x΄x$ γωνία $45°$ αν $g(0) = e - 1$.

. Έστω f, g παραγωγίσιμες με $g(x)=f(x)-x$. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των f, g στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$, $B(x_0, g(x_0))$ τέμνουν τον $y'y$ στο ίδιο σημείο.

. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Η ευθεία ε: $y=2x-1$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $(1, f(1))$. Να βρεθεί η εφαπτομένη της
$g(x)=f(x+\ln x)$
στο $x_0=1$.

. i) Να εξετάσετε αν η ευθεία ΑΒ με Α(1,4) και Β(0,-2) εφάπτεται στην συνάρτηση $f(x)=x^3+3x$.
ii) Να εξετάσετε αν η ευθεία ΑΒ με Α(1,1) και Β(2,4) εφάπτεται στην συνάρτηση $f(x)=x^3$.

. Να εξεταστεί αν η ευθεία $y=2e^2x+1$ εφάπτεται στην $f(x)=e^{2x}$.
Ομοίως αν η ευθεία $y=x-1$ εφάπτεται στην $f(x)=\ln x$.

. Έστω f συνεχής στο 2 και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x}{x-2}=0$, να δείξετε ότι η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στην f.

. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $|f(x)+\etaμx|+\sigmaυνx-1\le 0$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

. i) Αν $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)}{x-e}=e$ και η f συνεχής στο $x_0=e$, να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=e$ και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο $x_0=e$.
ii) Έστω ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$: $x-x^\nu\le f(x)\le x+x^\nu$, με $\nu\in\mathbb{N}$.
Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=0$.

. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει: $f(\alpha-x)-f(x+\alpha)=2\etaμx$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=\alpha$ με τον άξονα $y'y$.

. Η εφαπτομένη της f στο $x_0=1$ σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.
Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της $g(x)=f(e^{-x})$ στο

$A\left(0, g(0)\right)$ με τον $x'x$.

• Δίνεται ότι η εφαπτομένη της g στο 0 σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον $x'x$ και ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι $\left|f(x) - g(x)\right| \le x^4$. Να δείξετε ότι οι f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 0$

• Να βρεθεί η κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο των f, g:

α) $f(x) = x^2 + x$ και $g(x) = x^3 + x$

β) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = x^2 + 1$

γ) $f(x) = x^3$ και $g(x) = \ln x + 2x - 1$

δ) $f(x) = \frac{2}{x}$ και $g(x) = -x^2 + 3$

ε) $f(x) = \eta\mu(x-1)$ και $g(x) = x^2 - x$

• Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Α(α , 0)
και ισχύει ότι $g(x)\left(1 + f^2(x)\right) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι οι f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στο Α.

• Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \ne 0$. Αν ισχύουν $F(x)g(x) = f(x)$ και $\lim\limits_{t \to \pm\infty}\left[t\left(F\left(x + \frac{1}{t}\right) - F(x)\right)\right] = \sqrt{1 - F^2(x)}$, να δείξετε ότι:

i) Οι συναρτήσεις F, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$

ii) Οι f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στο x_0 για το οποίο ισχύει $F(x_0) = 1$

• Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - e \cdot x$, $g(x) = e^{-x} + e \cdot x$ εφάπτονται στον άξονα $x'x$.

• Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία τομής της με τους άξονες.
Να αποδειχθεί ότι αυτές τέμνονται κάθετα σε σημείο του άξονα $y'y$.

• Αν $f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 1$, $g(x) = e^{x-1}$, να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f, g να έχουν στο κοινό τους σημείο $A(1, y_0)$ κοινή εφαπτομένη.

Ποια είναι τότε η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης;

. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η ευθεία $y = \lambda x - 2$ να είναι εφαπτόμενη της
γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2 + 1$. Ποιο είναι το σημείο επαφής ;
Υπάρχουν άλλα σημεία επαφής;

. Έστω f παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ με $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε
$x, y > 0$ και $f'(1) = -1$, να δειχθεί ότι : i) $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$

ii) Υπάρχει μοναδικός $\alpha > 0$ ώστε οι εφαπτόμενες στα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$,
$B(\alpha, g(\alpha))$ με $g(x) = -e^x$, να είναι παράλληλες.

. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha > 0$. Η εφαπτομένη της γραφικής
παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ τέμνει τους άξονες στα σημεία A , B.
Να δειχθεί ότι : (α) (ΜΑ) = (ΜΒ) , (β) $E_{(OAB)} = 2\alpha$.

. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$

i) Δείξτε ότι η εφαπτομένη της f σε τυχαίο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ δεν έχει
με αυτήν άλλο κοινό σημείο εκτός του Α.

ii) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της f που διέρχονται από το σημείο $A(0, -1)$.

. i) Να βρεθεί η εφαπτομένη της συνάρτησης $f(x) = x^2 - \ln x$ που διέρχεται από
την αρχή των αξόνων O(0,0).

ii) Αν ισχύει ότι η g είναι συνεχής στο 1 και $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x) - 3x}{x - 1} = 0$, να δείξετε ότι
η ευθεία $y = 3x$ εφάπτεται στην g.

. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο
διάστημα $(-1, 0)$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της $f(x) = x^3$ που διέρχεται από το A(1,2).

Να δείξετε ότι οι $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu(x-1)$ και $g(x) = (x-1)^2 - 2$ έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο.

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ με $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$

i) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) Αν για την $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(x)g(x) = 1$ και $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\alpha, g(\alpha))$, να δείξετε ότι : α. Οι εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα A , B είναι κάθετες

β. Οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνουν τον $x'x$ κατά τμήμα σταθερού μήκους.

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) \cdot g(x) = 1$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$g(x) = \lim_{t \to \pm\infty} \left[t \cdot \left(g\left(\frac{xt-1}{t} \right) - g(x) \right) \right]$$

i) Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = -g(x)$

ii) Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)g'(x) \le 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των f , g στα σημεία $A(1, f(1))$, $B(1, g(1))$ είναι κάθετες.

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της $f(x) = e^x - 1$ στο σημείο $M(0, f(0))$ εφάπτεται στην συνάρτηση $g(x) = -x^2 + 3x - 1$

Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της $f(x) = e^{2x} - 1$ στο $x_0 = 0$ να εφάπτεται στην $g(x) = \alpha \ln x - \alpha$

Έστω ότι για κάθε $x , y \in \mathbb{R}$ ισχύει : $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$

α. Να δείξετε ότι η $g(x) = 2x + f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

γ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι δεν έχει εφαπτομένη που να σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{3}$

Αν f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2x}{x - 1} = 2$, να βρείτε την εφαπτομένη της $g(x) = f^2(x)$ στο $x_0 = 1$.