



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

14/1/2020

Θέμα Α

A1) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , να δείξετε ότι : $f'(x_0) = 0$.

A2) Πότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$;

A3) Θεωρήστε τον ισχυρισμό :

«Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$ τότε $f'(x_0) = 0$ » .

Να απαντήσετε με Σωστό ή Λάθος και να αιτιολογήσετε.

A4) Με βάση το σχήμα της f' να απαντήσετε με Σωστό ή Λάθος.

α. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

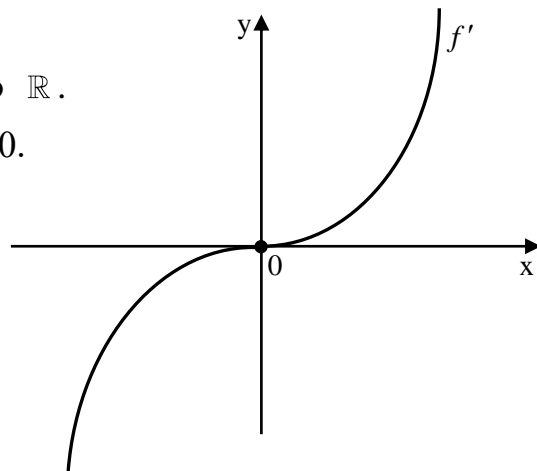
β. Η f έχει τοπικό ακρότατο στο 0.

γ. Η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

δ. Η εξίσωση $f(\eta\mu^2 x) = f(x^2)$

έχει μοναδική ρίζα.

ε. Ισχύει ότι : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} + f'(x)}{f'(x)} = +\infty$



Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$ με πεδίο ορισμού $A = (-1, +\infty)$.

B1) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

B2) Να δείξετε ότι $f^{-1}(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$, $x \in (0, e)$.

B3) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ έχει μοναδική ρίζα ξ στο διάστημα $(0, e)$.

B4) Να δείξετε ότι $(f \circ f)(\xi) = f^{-1}(\xi)$.

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x^2 + 1) - 1$, $A = \mathbb{R}$.

Γ1) Να βρείτε το σύνολο τιμών $f(A)$ και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $e^{f(x)} \cdot (1 + f^2(x)) = e^{f(a)+1}$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

Γ2) Να δείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα x_0 στο διάστημα $(0, 1)$.

Γ3) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha^{f(x)} + \beta^{-f(x)} \geq 2$, να δείξετε ότι $\alpha = \beta$ ($\alpha, \beta > 0$).

Γ4) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\sqrt{e-1}} 2xf(x) dx$.

Μονάδες (6 + 6 + 7 + 6)

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με f' συνεχή,

$f(A) = \mathbb{R}$ και $f^3(x) + f(f(x)) = x^3 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2f'(0) - 1$$

Δ1) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στην C_f .

Δ2) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Δ3) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(3))^{f(x)} + (f(2))^{f(x)}}{(f(3))^{f(x)} - (f(2))^{f(x)}}$

Δ4) Να δείξετε ότι: $\int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(1)} \frac{(3x^2 + 1)(x^3 + x - f^3(x))}{3f^2(x) + f'(f(x))} dx = \int_0^1 f(x) dx$.

Μονάδες (7 + 8 + 7 + 3)

