ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

15-03-2020

Θέμα Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσμη σε ενα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,\ x_0)\cup(x_0,\ \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο $(\alpha,\ \beta)$

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f είναι κυρτή στο Δ;

Α3. Θεωρήστε τον ισχυρισμό : «Αν η παραγωγίσιμη f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ τότε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$». Να απαντήσετε με Σωστό ή Λάθος και να αιτιολογήσετε.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος .

α) Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει καμπή σε ένα σημείο x_0 και είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0)=0$.

β) Αν η παραγωγίσιμη f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $\mathbb{R}$ τότε $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, τότε $f(A)=\mathbb{R}$.

δ) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε και η συνάρτηση $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

ε) Ισχύει ότι : $\int_2^1\left(f^2(x)+1\right)dx>0$

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$, A=$(-2,2)$

Β1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και περιττή στο A και στη συνέχεια να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(A)$.

Β2. Να δείξετε ότι η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x)=2\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

Β3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των f, f^{-1} .

Β4. Να υπολογιστεί το $\mathrm{I}=\int_0^1\left(\left(\mathrm{f}(\mathrm{x})\right)^4\left(\int_{-1}^1 \mathrm{f}(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}\right)\right)\mathrm{dx}$

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-9x}{x^2-1}$, $\mathrm{A}=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ **.**

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της . Να βρείτε το σύνολο τιμών της και στη συνέχεια να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3-9x=2020x^2-2020$ έχει ακριβώς τρείς ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Να μελετήσετε την κυρτότητα της f και να βρείτε το σημείο καμπής της.

Γ3. Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στην C_f , την ασύμπτωτη της και την ευθεία $x=\dfrac{1}{2}$.

Γ4. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha>2$ ισχύει ότι :

$$(\alpha-2)\left(\frac{\alpha^2+3}{\alpha^2-1}\right)^2<\int_2^{\alpha}\frac{x^4+6x^2+9}{x^4-2x^2+1}dx<\frac{49(\alpha-2)}{9}$$

Θέμα Δ

Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και g' συνεχής στο $[0,e]$ όπου ισχύει

$$f'(x)=f(x)+\int_0^e\left[\left(g'(x)-2x\right)^2\int_0^1 f^2(t)\,dt\right]dx \quad \textbf{με} \quad f(0)=g(0)=1 \ , \ f(1)=e$$

Δ1. Να δείξετε ότι $\varphi(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{f}(\mathrm{x})$ εφαρμόζει το Θ. Rolle στο $[0,1]$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $f(x)=e^x$.

Δ2. Να δείξετε ότι $g(x)=x^2+1$, $x\in A=[0,e]$.

Δ3. Να δείξετε ότι f , g έχουν κοινό σημείο μόνο το Μ(0,1) και να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στις f , g , x = 2.

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{ex}{1+\ln^2 x}=\dfrac{e^x}{x^2-2x+2}$, $\mathrm{x}\in[1,e]$.

Δ5. Να βρείτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$F(x)=\left(e^a-a-1\right)\left(e-f(x)\right)+xg(x)\left(\ln\beta-\beta+1\right)$, να εφαρμόζει το Θ. Bolzano στο διάστημα $\Delta=[0,1]$.

ευχόμαστε επιτυχία!