Πατρόκλου 66 Ίλιον
2637345 - 2629440
www.group-aei.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

15-4-2020

Θέμα Α

Α1. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)<f(\beta)$.
Να αποδείξετε ότι για κάθε $\eta\in\left(f(\alpha),f(\beta)\right)$ υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε :

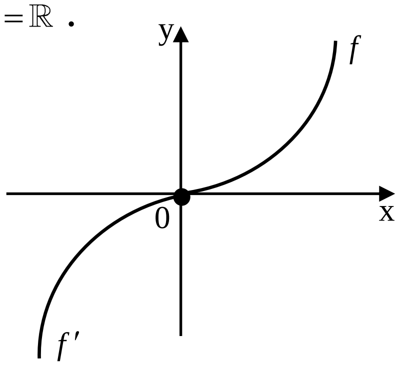
$$f(x_0)=\eta$$

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος Δ και είναι γνησίως αύξουσα θα ισχύει ότι : $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό με Α(αληθή) ή Ψ(ψευδής).
β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα α.

Α3. α) Πότε δυο συναρτήσεις f , g είναι ίσες ;
β) Πότε η f είναι συνεχής στο $x_0\in A$;
γ) Πότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0\in A$;
δ) Πότε η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$ εφάπτεται στην f ;

Α4. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}$.
Στο διπλανό σχήμα βρίσκονται τμήματα από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f'.



Αν δίνεται ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=2f''(0)=f(1)-1$,
να απαντήσετε με Σωστό ή Λάθος για τις παρακάτω προτάσεις.

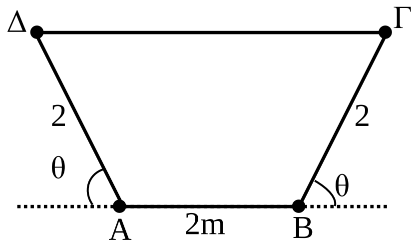
α) Οι συναρτήσεις f και f' έχουν κοινή εφαπτομένη στο 0.

β) Ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Η εξίσωση $f(x)+2=\eta\mu^2 x+2\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς δυο λύσεις.

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu x\left(f\left(\dfrac{e^x+1}{e^x}\right)-1\right)\right]=0$

Θέμα Β



Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο του σχήματος και η γωνία $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ **.**

Β1. Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του τραπεζίου είναι ίσο με $\mathrm{E}(\theta)=4\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Β2. Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν του τραπεζίου μεγιστοποιείται;

Β3. Να δειχθεί ότι υπάρχουν 2 τιμές θ για τις οποίες το εμβαδόν γίνεται ίσο με $\sqrt{17}$.

Β4. Αν το $\mathrm{E}(\theta)$ ελαττώνεται με ρυθμό $\sqrt{3}+1m^2/\sec$ τη στιγμή t_0 όπου $\theta(t_0)=\frac{\pi}{6}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ τη χρονική στιγμή t_0 .

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση f με $\mathrm{A}=(0,\pi)$ **με** $\lim\limits_{h\to0}\frac{\eta\mu x\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h}=\sigma\upsilon\nu x$ **με** $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ **.**

Γ1) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln(\eta\mu x)$, $x\in\mathrm{A}$.

Γ2) Να βρεθεί το σύνολο τιμών $f(\mathrm{A})$.

Γ3) Να λύσετε την ανίσωση $\ln\frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x}<x-\eta\mu x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Γ4) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{f^2(x)+f(x)+1}+f(x)\right)$

Θέμα Δ

Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathrm{A}=(0,+\infty)$ **με** $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=\frac{e^x-\frac{1}{x}}{e^x-\ln x}$ **και** $f(1)=0$ **. Να δείξετε ότι :**

Δ1) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln\left(e^x-\ln x\right)$-1 , $\mathrm{A}=(0,+\infty)$

Δ2) Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στη θέση $x_0\in(0,1)$.

Δ3) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δυο ρίζες στο Α.

Δ4) Να δείξετε ότι $e^x-\ln x\geq(e-1)(x-1)+e$ για κάθε $x>0$, να βρείτε το σύνολο τιμών $f(\mathrm{A})$ και στη συνέχεια το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^x=e^\alpha+\ln x$ για τις διάφορες τιμές του α.

«Η βλακεία ξέρει , η ευφυΐα διερωτάται…»