ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

20-4-2020

Θέμα Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα του Fermat.

Α2. Θεωρήστε τον ισχυρισμό : «Για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}^*$ ισχύει $f'(x)=0$ τότε η f είναι σταθερή ».
Να απαντήσετε με Σωστό ή Λάθος και να αιτιολογήσετε.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος .

α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και g είναι συνάρτηση συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεση της g με την f είναι συνεχής στο x_0 .

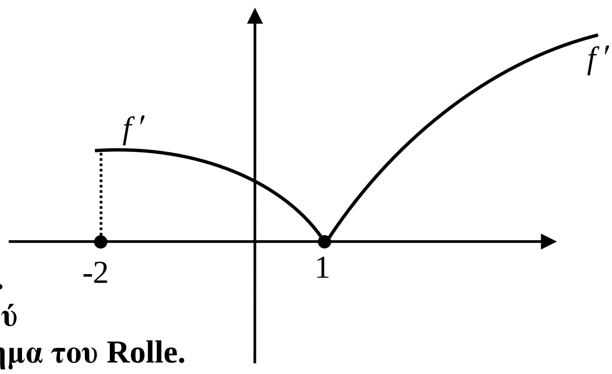
β) Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ έχει πάντα ένα ακριβώς τοπικό ακρότατο.

γ) Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}: f'(x)=f(x)$ τότε $f(x)=e^x$.

δ) Αν για $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=2$ τότε $f(x)=2x$.

ε) Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $|\eta\mu x|<|x|$

Α4. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $[-2,+\infty)$. Από τις ακόλουθες προτάσεις ποια είναι αληθής;



α) Η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
β) Η συνάρτηση f δεν έχει κρίσιμα σημεία.
γ) Δεν υπάρχει διάστημα του πεδίου ορισμού της f' στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle.
δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f'(x)}=+\infty$

Θέμα Β

Έστω οι συναρτήσεις $g(x)=\alpha x+2\beta\sqrt{x}$ και $h(x)=\ln x$. Αν η ευθεία $y=2x+1$ εφάπτεται στην g στο $x_0=1$:

Β1. Να δείξετε ότι $\alpha=\beta=1$ και να ορίσετε τη σύνθεση της h με την g δηλαδή $f=goh$.

Β2. Να βρείτε την αντίστροφη της f.

Β3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x-e}+\frac{g(x)}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (2,e).

Β4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left[\text{ημ}f(x)\,\text{ημ}\frac{1}{f(x)}\right]$.

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όπου ισχύει ότι : $\left|f(x)-f(y)\right|\le(x-y)^2$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)x^4+1}{x^4+x+1}=1$. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathrm{A}=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει ότι $x^2g^2(x)=\text{ημ}^2x$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{\pi}$

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Να δείξετε ότι $g(x)=\begin{cases}\frac{\text{ημ}x}{x} & , \; x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right] \\ f(x) & , \; x=0\end{cases}$

Γ3. Να βρείτε τα ακρότατα της g.

Γ4. Να δείξετε ότι : $2x\text{ημ}\left(\frac{\text{ημ}x}{x}\right)\le\pi\cdot\text{ημ}x\cdot\text{ημ}\frac{2}{\pi}$ για κάθε $x\in A$.

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f'(x)\le 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(2)=4=-f(-2)$. Αν ισχύει ότι $g''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)-x^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+4x-12}{x-2}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=2x-3$ εφάπτεται στην g στο $\mathrm{M}(2,g(2))$.

Δ2. Να δείξετε ότι $g(x)\le 2x-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ3. Να δείξετε ότι $f(0)=0$

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) + \eta\mu f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} = \frac{e^x}{e^x - 1}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $\Delta = (-\infty, 0)$.