

**ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΣΗΜΑΙΝΕΙ...**



**Πατρόκλου 66 Ίλιον
2637345 - 2629440
www.group-aei.gr**



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

3/1/2020

Θέμα Α

A1) Αν $f(x) = \sqrt{x}$ με $x \geq 0$, να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$.

A2) Να δοθεί ορισμός του τοπικού μέγιστου μιας συνάρτησης f .

A3) Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $f'(x_0) = 0$ τότε η τιμή $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο».

Να απαντήσετε με Σωστό ή Λάθος και να αιτιολογήσετε.

A4) Με βάση το διπλανό σχήμα της f να απαντήσετε με Σωστό ή Λάθος στις παρακάτω προτάσεις.

α. Η εξίσωση $f^{-1}(f^{-1}(x) - e) = e$

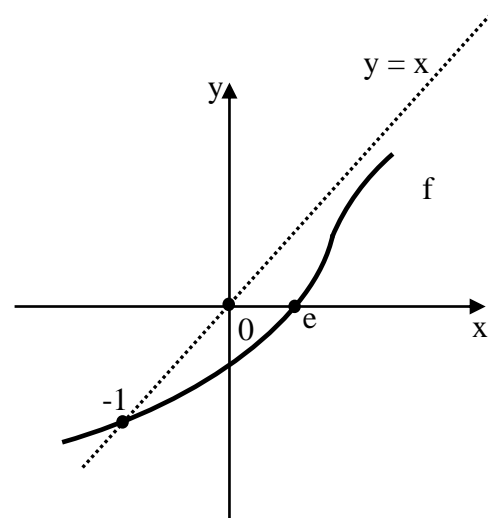
έχει ρίζα το 0.

β. Ισχύει ότι το $\lim_{x \rightarrow e} \frac{x}{f(x)} = +\infty$.

γ. Η f έχει σημεία καμπής.

δ. Ισχύει ότι το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f^{-1}(x) - x) = 0$.

ε. Ισχύει ότι το $\int_0^e f(x) dx + \int_{-2}^{-1} f^{-1}(x) dx > 0$



Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με f' συνεχή στο \mathbb{R} , όπου ισχύει: $f(x) + e^{1-f(x)}(f(x)+1) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(e) = 0$ και $f(A) = \mathbb{R}$

B1) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B2) Να δείξετε ότι έχει αντίστροφη τη συνάρτηση

$$f^{-1}(x) = e^{-x+1}(x+1) + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

B3) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq x$.

B4) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στην f , την $y = x$ και την $x = e$.

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x + x$ με $A = (0, +\infty)$.

Γ1) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-1} = \frac{1-x}{x}$ έχει μοναδική ρίζα στο $A = (0, +\infty)$.

Γ2) Να δείξετε ότι η f έχει ακρότατο στη θέση $x = a$ με $a \in (0, 1)$ και στη

συνέχεια ότι: $ae^{x-1} + a \ln \frac{e^x}{x} \geq a^2 - a \ln a - a + 1$ για κάθε $x > 0$.

Γ3) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ και να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{f(a)}{2}\right)^{f(x)} + e^{-f(x)}}{(f(x))^{f(x)}}$$

Γ4) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στην f , την εφαπτομένη της στο $x_0 = 1$ και την ευθεία $x = e$.

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο \mathbb{R} και F μια παράγουσα της στο \mathbb{R} με $F(1) = 1$.

Αν δίνεται ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)F(x) - x^2}{x-1} = -f'(1) + 7$

Δ1) Να δείξετε ότι $f(1) = 1$ και ότι η εφαπτομένη της f στο $x_0 = 1$ είναι η ευθεία $y = 4x - 3$.

Δ2) Να δείξετε ότι η εξίσωση $E: \frac{f(x+1) - 5x}{e - e^x} = \frac{\int_1^2 f(x) dx - 3}{x-2}$ έχει

τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Δ3) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

Δ4) Να δείξετε ότι $\int_1^2 (2x-3)F(x) dx > 0$.

