



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

3-4-2020

Θέμα Α

A1. Να δείξετε ότι $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .

A2. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς.

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι :

i. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$.

ii. Είναι γνησίως φθίνουσα.

iii. Είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$.

iv. Είναι συνεχής στο x_0 .

A3. Με βάση το σχήμα της f'' να απαντήσετε με Σωστό ή Λάθος:

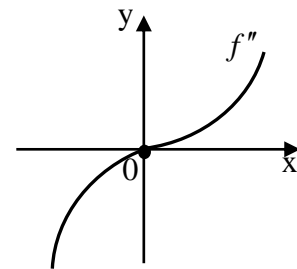
α) Το $x_0 = 0$ είναι σημείο καμπής της f .

β) Η εξίσωση $f(x) = f'(0)x + f(0)$ έχει μόνο μια λύση.

γ) Ένα σημείο $M(x, f(x))$ που κινείται στην C_f με $x > 0$ κινείται με θετική φορά.

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{xf''(x)} = +\infty$.

ε) Ισχύει ότι: $f'(\ln x) \leq f'(x-1)$ για $x \in (0, 1]$.



Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^3 + 3x^2$ με $A = \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ όπου ισχύει

ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3 + 1} = -2$.

B1. Να μελετηθεί η μονοτονία της f , να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα και το σύνολο τιμών της.

B2. Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα, να βρεθούν τα σημεία καμπής και να γίνει η γραφική παράσταση της C_f .

B3. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$g(x) = f(x) + \int_0^1 f(x) dx, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

iv. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (-1, 1) : -3x_0^2 + 3x_0 = -1$.

v. Να βρεθεί το όριο $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right]$.

Θέμα Γ

Ισοσκελές τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 1. Αν θ είναι η γωνία των ίσων πλευρών του τριγώνου με $\theta \in (0, \pi)$:

Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$E(\theta) = (1 + \cos\theta)\eta\mu\theta, \quad 0 < \theta < \pi.$$

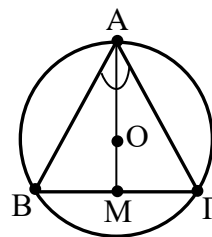
Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία το εμβαδόν $E(\theta)$ του τριγώνου γίνεται μέγιστο.

Γ3. Δειξτε ότι υπάρχουν δυο τιμές της γωνίας θ

$$\text{για τις οποίες το } E(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \eta\mu^3\theta d\theta.$$

Γ4. Να μελετήσετε την κυρτότητα της συνάρτησης $E(\theta)$ και να δειχθεί ότι υπάρχει

μοναδικό $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{5\pi}{6}$ στο οποίο παρουσιάζει καμπή .



Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(x+h) - f^2(x)}{h} = x - 1$,

με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = \sqrt{2}$.

Δ1) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με τύπο

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}, \quad A = \mathbb{R}.$$

Δ2) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = x - 1$, $\varepsilon_2 : y = -x + 1$ είναι ασύμπτωτες της f στα $+\infty$, $-\infty$ αντίστοιχα.

Δ3) Να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμψής της f .

Δ4) Να δείξετε ότι $(f(x))^{f(x)} \geq e^{f(x)-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ5) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(f^2(x) - 2\alpha f(x) + \alpha^2 + 2) = \sqrt{2}$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ6) Να υπολογίσετε το $I = \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$.