

**ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΣΗΜΑΙΝΕΙ...**



**Πατρόκλου 66 Ίλιον
2637345 - 2629440
www.group-aei.gr**



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

8-4-2020

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι : α) $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$ β) $(\varepsilon\phi x)' = 1 + \varepsilon\phi^2 x$

A2. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle .

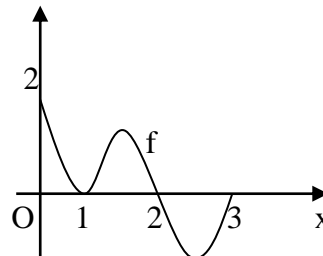
A3. Με βάση το σχήμα της f

και την $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

να βρείτε το πεδίο ορισμού

της σύνθεσης της f με την g

και το όριο : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{xf(x) - 2f(x)}$



A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις , με Σωστό ή Λάθος .

α) Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι “1-1” όταν για κάθε $y \in f(A)$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ως προς x μια τουλάχιστον λύση στο A.

β) Αν ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$ τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f.

γ) Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό

δ) Μια συνάρτηση f που δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές των $f(\alpha), f(\beta)$

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , έχει μια μέγιστη τιμή και μια ελάχιστη.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \eta \mu \frac{1}{x} + 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

B1) Ναδειχτεί ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

B2) Να βρεθεί η f' και να εξετάσετε αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$

B3) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και το σύνολο τιμών της f .

B4) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0, f(0))$ και τα κοινά σημεία της C_f και της εφαπτομένης.

B5) Αν $M(x_0, f(x_0))$ είναι κοινό σημείο της C_f και της εφαπτομένης τότε $|\pi x_0| \leq 1$.

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ όπου η εφαπτομένη στο σημείο της $M(0, -2)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 4$

Γ1) Ναδειχτεί ότι $\alpha = 2$, $\beta = -2$. Να μελετηθεί η μονοτονία και το σύνολο τιμών της. Να δείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα ρ

Γ2) Ναδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να λυθεί η ανίσωση :

$$f^{-1}(0) + f\left[4 + f\left(x^3 + 6\eta\mu x - 6x\right)\right] < 10 + f^{-1}(-2) + \rho$$

Γ3) Να βρεθεί το σημείο $K(x, f(x))$, $x \geq 0$ της C_f που απέχει από την ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 4$ ελάχιστη απόσταση.

Γ4) Αν δίνεται ότι : $\alpha^{f(x)} \geq f(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $\alpha = e$

Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1}$ όπου $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x - 3] = 0$

Δ1) Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$

Δ2) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και στη συνέχεια να δείξετε ότι το $O(0, f'(0))$ είναι ελάχιστο του ρυθμού μεταβολής της

Δ3) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\alpha < 0$ ώστε $f(\alpha) = 0$ και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f^2(x)$ έχει τρία τοπικά ακρότατα

Δ4) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Δ5) Να δείξετε ότι $f(-\alpha) = 4$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην $\varepsilon_1: 2x + \alpha y = 0$