Θέμα 1

Να βρεθεί η συνθεση fog και gof αν $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ και $g(x)=\sqrt{x}$.

ΛΥΣΗ

Για τη σύνθεση fog έχουμε :

$A_f = \mathbb{R} - \{1\}$ και $A_g = [0,+\infty)$ οπότε για να ορίζεται η fog πρέπει :

$A_{fog} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} = \{x \geq 0 \text{ και } \sqrt{x} \neq 1\} = \{x \geq 0 \text{ και } x \neq 1\} =$

$=[0,1)\cup(1,+\infty) \neq \varnothing$ οπότε ορίζεται η fog : $[0,1)\cup(1,+\infty) \to \mathbb{R}$

με τύπο : $(fog)(x) = f(g(x)) = \dfrac{g(x)}{g(x)-1} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

Όμοια για την gof έχουμε :

$A_{gof} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\} = \left\{ x \neq 1 \text{ και } \dfrac{x}{x-1} \geq 0 \right\} = (-\infty, 0] \cup (1,+\infty) \neq \varnothing$

άρα ορίζεται η gof με τύπο : $(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$.

Θέμα 2

Αν $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ και $g(x)=\dfrac{2x}{x-3}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις fog , fof .

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι $A_f = \mathbb{R} - \{1,-1\}$ και $A_g = \mathbb{R} - \{3\}$ οπότε είναι :

$A_{fog} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} = \left\{x \neq 3 \text{ και } \dfrac{2x}{x-3} \neq \pm 1\right\} =$

$= \{x \neq 3 \text{ και } x \neq -3 \text{ και } x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{3,-3,1,\} \neq \varnothing$ οπότε:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{(g(x))^2 - 1} = \frac{\dfrac{2x}{x-3}}{\left(\dfrac{2x}{x-3}\right)^2 - 1}$$

Είναι $A_{fof} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_f\} = \left\{x \neq \pm 1 \text{ και } \dfrac{x}{x^2-1} \neq \pm 1\right\} =$

$$=\left\{\ x\neq\pm1 \quad \text{και} \quad x\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad x\neq\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\ \right\}=\mathbb{R}-\left\{\pm1,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}\neq\varnothing$$

άρα $(fof)(x)=f\big(f(x)\big)=\dfrac{f(x)}{(f(x))^2-1}=\dfrac{\frac{x}{x^2-1}}{\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^2-1}$.

Θέμα 3

Αν $f(x)=e^x-e^{-x}$ και $g(x)=\ln x$ και να βρεθεί η gof και η fog .

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε ότι $A_f=\mathbb{R}$ και $A_g=(0,+\infty)$ οπότε είναι :

$$A_{gof}=\{x\in A_f\ \text{και}\ f(x)\in A_g\}=\{x\in\mathbb{R}\ \text{και}\ e^x-e^{-x}>0\}\overset{(*)}{=}(0,+\infty)\neq\varnothing$$

$(*)\, e^x-e^{-x}>0\Leftrightarrow e^x>e^{-x}\Leftrightarrow x>-x\Leftrightarrow 2x>0\Leftrightarrow x>0$ οπότε ορίζεται η gof

με τύπο : $(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=\ln f(x)=\ln(e^x-e^{-x})$

ii. $A_{fog}=\{x\in A_g\ \text{και}\ g(x)\in A_f\}=\{x>0\ \text{και}\ \ln x\in\mathbb{R}\}=\{x>0\ \text{και}\ x>0\}=(0,+\infty)$

οπότε για τον τύπο έχουμε :

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=e^{g(x)}-e^{-g(x)}=e^{\ln x}-e^{-\ln x}=x-e^{\ln x^{-1}}=x-x^{-1}=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}\ .$$

Θέμα 4

Αν $f(x)=\begin{cases}x+5 & x\geq 0\\ x^2 & x<0\end{cases}$ και $g(x)=e^x$. Να βρεθεί η συνάρτηση fog .

ΛΥΣΗ

Δουλεύουμε κατά κλάδο τις περιπτώσεις :

i. $x\in[0,+\infty)$ με $f(x)=x+5$ και $g(x)=e^x\ /\ A_g=\mathbb{R}$ οπότε :

$$A_{fog}=\{x\in\mathbb{R}\ \text{και}\ e^x\geq 0\}=R\ \text{και}\ (fog)(x)=f\big(g(x)\big)=g(x)+5=e^x+5\ .$$

ii. $x \in (-\infty, 0)$ με $f(x) = x^2$ τότε $A_{fog} = \{x \in \mathbb{R}$ και $e^x < 0\} = \varnothing$ (άτοπο) .

Δεν ορίζεται η fog για $x \in (-\infty, 0)$. Δηλαδή $fog : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $(fog)(x) = e^x + 5$.

Θέμα 5

Δίνεται η συνάρτηση $f : [2,7] \to \mathbb{R}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x^2 - 2)$.

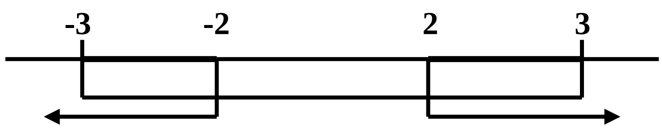
ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^2 - 2 \,/\, A_h = \mathbb{R}$ τότε είναι :

$g(x) = f(x^2 - 2) = f(h(x)) = (foh)(x)$ άρα ζητούμε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης foh και έχουμε :

$A_g = A_{foh} = \{x \in A_h$ και $h(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R}$ και $2 \le x^2 - 2 \le 7\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}$ και $(x^2 \le 9$ και $x^2 \ge 4)\} = [-3, -2] \cup [2, 3]$.



Θέμα 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x - 1$, $A = (0, +\infty)$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και να λυθούν : α) $f(x) = 0$, β) $x^2 - x^3 > \ln x$

ΛΥΣΗ

Για $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$ άρα $x_1 + \ln x_1 - 1 < x_2 + \ln x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο A.

α) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει προφανή ρίζα την $x = 1$ που είναι μοναδική διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.

β) Η ανίσωση γίνεται $x^2 + 2\ln x - 1 > x^3 + 3\ln x - 1 \Leftrightarrow f(x^2) > f(x^3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 > x^3 \Leftrightarrow x^2(1 - x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ άρα $x \in (0, 1)$.

Θέμα 7

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(x+y) \le f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in R$.

i. Δείξτε ότι η f έχει μη αρνητικές τιμές.

ii. Δείξτε ότι $|f(x) - f(y)| \le f(x-y)$ για $x, y \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

i. Η υπόθεση για $x = y = 0$ δίνει $f(0) \le f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) \ge 0$.

Επίσης για $y = -x$ γίνεται : $f(0) \le f(x) + f(-x)$.

Όμως η f είναι άρτια οπότε $f(-x) = f(x)$ άρα έχω $2f(x) \ge f(0) \ge 0$ άρα $f(x) \ge 0$.

ii. Θέτουμε διαδοχικά στην υπόθεση όπου x το $x-y$ και όπου y το $y-x$ οπότε έχουμε : $f(x) \le f(x-y) + f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) \le f(x-y)$ **(1)**

$$f(y) \le f(x) + f(y-x) \underset{f(x-y)=f(y-x)}{\overset{f \text{ άρτια}}{\Leftrightarrow}} f(y) \le f(x) + f(x-y) \Leftrightarrow -f(x-y) \le f(x) - f(y) \quad \textbf{(2)}$$

Από **(1)** και **(2)** έχουμε: $-f(x-y) \le f(x) - f(y) \le f(x-y) \overset{f(x-y)\ge 0}{\Leftrightarrow} |f(x) - f(y)| \le f(x-y)$

Θέμα 8

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + \alpha^2}$ και $g(x) = \beta x$ με $\alpha \neq 0$ και $\beta < 0$.

Να βρεθούν οι α,β ώστε να ισχύει $fog = gof$.

ΛΥΣΗ

Επειδή οι συναρτήσεις f , g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχουμε ότι : $A_{fog} = A_{gof} = \mathbb{R}$

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $(fog)(x) = (gof)(x) \Leftrightarrow f(g(x)) = g(f(x)) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(\beta x) = g\left(\frac{x}{x^2+\alpha^2}\right) \Leftrightarrow \frac{\beta x}{\beta^2 x^2 + \alpha^2} = \frac{\beta x}{x^2+\alpha^2} \Leftrightarrow x(x^2+\alpha^2) = x(\beta^2 x^2 + \alpha^2) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^3 = \beta^2 x^3 \Leftrightarrow x^3(1-\beta^2) = 0$ για να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει :

$1 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \beta^2 = 1 \overset{\beta<0}{\Leftrightarrow} \beta = -1$ και $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Θέμα 9

Να βρείτε την αντίστροφη των συναρτήσεων :

i. $f(x) = 2x + 3$ **ii. $f(x) = x^2 - x$**

iii. $f(x) = x^3 - 1$ **iv. $f(x) = e^{-x} + 1$**

ΛΥΣΗ

i. Είναι $A = \mathbb{R}$ και εξετάζουμε αν είναι 1–1 . Έχουμε :

Έστω $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$ οπότε ορίζεται η συνάρτηση

$f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$. Βρίσκουμε τον τύπο της : $y = f(x) \Leftrightarrow 2x + 3 = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y-3}{2}$

εναλλάσσοντας τα x ,y έχουμε : $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$.

ii. Είναι $A = \mathbb{R}$ και παρατηρούμε ότι :

$f(x) = x^2 - x = x(x-1)$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 0$. Άρα η f δεν είναι 1–1 οπότε δεν ορίζεται αντίστροφη συνάρτηση .

iii. Είναι $A = \mathbb{R}$ και εξετάζουμε αν είναι 1–1 . Έχουμε :

Έστω $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα είναι 1–1 οπότε ορίζεται η $f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$.

Για τον τύπο είναι : $y = f(x) \Leftrightarrow x^3 - 1 = y \Leftrightarrow x^3 = y+1$

- Αν $y+1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -1$ τότε $x = \sqrt[3]{y+1}$
- Αν $y+1 < 0 \Leftrightarrow y < -1$ τότε $x^3 = y+1 \Leftrightarrow -x^3 = -(y+1) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow (-x)^3 = -(y+1) \Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{-y-1} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{-y-1}$

Άρα $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & \text{αν } x \geq -1 \\ -\sqrt[3]{-x-1} & \text{αν } x < -1 \end{cases}$.

iv. Είναι $A = \mathbb{R}$ και εξετάζουμε αν είναι 1–1 .

Έστω $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{-x_1} + 1 = e^{-x_2} + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ οπότε ορίζεται η $f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$

$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{-x} + 1 \Leftrightarrow e^{-x} = y - 1 \Leftrightarrow -x = \ln(y-1) \Leftrightarrow x = -\ln(y-1)$, y>1

οπότε $f^{-1}(x) = -\ln(x-1)$, x >1 .

Θέμα 10

Να βρεθεί η αντίστροφη της $\mathbf{f(x)=\begin{cases} 2x & x\ge 2 \\ x+2 & x<2 \end{cases}}$ **.**

ΛΥΣΗ

Έστω $x_1, x_2 \in [2,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$ με $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1+2 = x_2+2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Έστω $x_1 \in [2,+\infty)$ και $x_2 \in (-\infty, 2)$ τότε $x_1 \ne x_2$

Επίσης είναι : $x_1 \ge 2 \Rightarrow 2x_1 \ge 4 \Rightarrow f(x_1) \ge 4$

$x_2 < 2 \Rightarrow x_2+2 < 4 \Rightarrow f(x_2) < 4$

Άρα $f(x_1) \ne f(x_2)$, δηλαδή η f 1–1 οπότε ορίζεται η f^{-1}: $f(A) \to \mathbb{R}$.

Βρίσκουμε τον τύπο της f^{-1} :

- Για $x \ge 2$: $y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$, $y \ge 4$
- Για $x < 2$: $y = x+2 \Leftrightarrow x = y-2$, $y < 4$

Έτσι έχουμε : $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{αν } x \ge 4 \\ x-2 & \text{αν } x < 4 \end{cases}$.

Θέμα 11

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x , y \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι :

i. Η f είναι περιττή .

ii. Αν η f έχει μοναδική ρίζα : α) Να δειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη , β) $f^{-1}(\alpha + \beta) = f^{-1}(\alpha) + f^{-1}(\beta)$ αν δίνεται ότι $f(A) = \mathbb{R}$

γ) Να λυθεί η εξίσωση : $f\left(e^x\right) + f\left(2\right) = f\left(4e^{\frac{x}{2}}\right) - f\left(1\right)$

ΛΥΣΗ

i. Για $x = y = 0$ είναι $f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

Θέτουμε $y = -x$ οπότε $f(x - x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = - f(x)$. Άρα η f περιττή.

ii. α) Αφού η f έχει μοναδική ρίζα αυτή είναι το 0 δηλ. ισχύει : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Θα δείξουμε ότι η f είναι $1-1$. Έστω $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1)+f(-x_2)=0\Rightarrow f(x_1-x_2)=0\Rightarrow x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι αντιστρέψιμη .

β) Επειδή $f(A)=\mathbb{R}$ υπάρχουν $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_1)=\alpha$, $f(x_2)=\beta$ οπότε :

$$f^{-1}(\alpha+\beta)=f^{-1}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)=f^{-1}\left(f(x_1+x_2)\right)=x_1+x_2=f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta)$$

iii. Η εξίσωση γίνεται : $f\left(e^x+2\right)=f\left(4e^{\frac{x}{2}}\right)+f(-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\left(e^x+2\right)=f\left(4e^{\frac{x}{2}}-1\right)\Leftrightarrow e^x-4e^{\frac{x}{2}}+3=0$

Θέτουμε $e^{\frac{x}{2}}=\omega$ άρα $\omega^2-4\omega+3=0\Leftrightarrow\omega=1$ ή $\omega=3$ άρα $e^{\frac{x}{2}}=1\Leftrightarrow x=0$

και $e^{\frac{x}{2}}=3\Leftrightarrow x=2\ln 3=\ln 9$.

Θέμα 12

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $(f o f)(x)=x^3-f(x)$. Να λυθεί η εξίσωση $f(x^3+3x)=f(x+3)$.

ΛΥΣΗ

Θα δείξουμε ότι η f είναι 1–1. Έστω $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$

$f\left(f(x_1)\right)=f\left(f(x_2)\right)\Rightarrow x_1^3-f(x_1)=x_2^3-f(x_2)\Rightarrow\ \Rightarrow x_1^3=x_2^3\Rightarrow x_1=x_2$.

Οπότε η εξίσωση γίνεται $f(x^3+3x)=f(x+3)\Leftrightarrow x^3+3x=x+3\Leftrightarrow$

$x^3+2x-3=0\Leftrightarrow x=1$.

Χρησιμοποιούμε το σχήμα Horner ή με τη μονοτονία της $g(x)=x^3+2x-3$.

Θέμα 13

Έστω ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\left(f(x)\right)^5+f(x)=x$ με $f(A)=\mathbb{R}$. Να βρείτε την f^{-1} και να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f, f^{-1} είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρεθούν τα κοινά τους σημεία.

ΛΥΣΗ

Έστω $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^5(x_1)=f^5(x_2)$ άρα $f(x_1)+f^5(x_1)=f(x_2)+f^5(x_2)\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=x_2$ και η f 1 – 1, θέτοντας όπου x την $f^{-1}(x)$ παίρνουμε $f^{-1}(x)=x^5+x$

Για $x_1<x_2\Rightarrow x_1^5<x_2^5$ άρα $x_1^5+x_1<x_2^5+x_2\Rightarrow f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$ άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(\mathrm{A})=\mathbb{R}$.

Έστω $x_1<x_2\Rightarrow f^5(x_1)+f(x_1)<f^5(x_2)+f(x_2)\Rightarrow f^{-1}(f(x_1))<f^{-1}(f(x_2))\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία λύνουμε την εξίσωση

$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f^{-1}(f(x))=f^{-1}(f^{-1}(x))\Leftrightarrow x=f^{-1}(f^{-1}(x))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+f^{-1}(x)=f^{-1}(x)+f^{-1}(f^{-1}(x))$.

Θεωρούμε την $g(x)=x+f^{-1}(x)$ που είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η εξίσωση γίνεται $g(x)=g(f^{-1}(x))\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow x^5+x=x\Leftrightarrow x=0$.

Θέμα 14

Έστω $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα . Να αποδειχθεί η ισοδυναμία : $\mathbf{f(x_o)=x_o\Leftrightarrow f(x_o)=f^{-1}(x_o)}$. Να δείξετε με ένα παράδειγμα ότι οι εξισώσεις $\mathbf{f(x)=x}$ και $\mathbf{f(x)=f^{-1}(x)}$ δεν είναι πάντα ισοδύναμες .

ΛΥΣΗ

Έστω $f(x_o)=x_o\Rightarrow f^{-1}(f(x_o))=f^{-1}(x_o)\Rightarrow x_o=f^{-1}(x_o)\Rightarrow f(x_o)=f^{-1}(x_o)$.

Αντίστροφα . Έστω $f(x_o)=f^{-1}(x_o)$. Αν $f(x_o)\neq x_o$ θα είναι $f(x_o)>x_o$ ή $f(x_o)<x_o$.

Έστω $f(x_o)>x_o\Rightarrow f^{-1}(f(x_o))>f^{-1}(x_o)\Rightarrow x_o>f^{-1}(x_o)\Rightarrow x_o>f(x_o)$ <u>άτοπο</u>

(οι f , f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας) .

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = -x$, γνησίως φθίνουσα , οπότε είναι $f^{-1}(x) = -x$ άρα η εξίσωση $f(x)=x\Leftrightarrow -x=x\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$.

Ενώ η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow -x=-x\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Θέμα 15

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + x + 2$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

ii. Να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(2)$ και να λυθεί η εξίσωση $f(x) = e^{-x} + x^3 + 1$

iii. Να λυθεί η ανίσωση : $f^{-1}(x^2 - x) > 0$.

ΛΥΣΗ

i. Έστω $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$ άρα έχουμε $x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^3 + x_1 + 2 < x_2^3 + x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

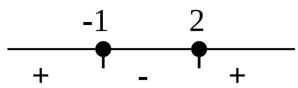
ii. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x^3 + x + 2) = x$. Για $x = 0$ δίνει $f^{-1}(2) = 0$.

Με αντικατάσταση η εξίσωση γίνεται $e^{-x} - x - 1 = 0$ η οποία έχει προφανή ρίζα το 0

Επίσης η συνάρτηση $g(x) = e^{-x} - x - 1$ είναι γνησίως φθίνουσα οπότε το 0 είναι η μοναδική ρίζα .

iii. Έχουμε $f^{-1}(x^2 - x) > 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x^2 - x) > f^{-1}(2) \Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(x^2 - x\right)\right) > f\left(f^{-1}(2)\right) \Leftrightarrow$

$x^2 - x > 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0$ άρα $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$



Θέμα 16

Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία A(1,2) , B(3,4).

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λυθεί η ανίσωση $f\left(f\left(3x^2\right) - 3\right) < 2$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f\left(f^{-1}(x) + 2\right) = 4$

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ότι $f(1)=2$, $f(3)=4$. Η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Όμως $1<3$ και $f(1)<f(3)$ άρα η η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $f\left(f\left(3x^2\right)-3\right)<2=f(1)\Leftrightarrow f\left(3x^2\right)-3<1\Leftrightarrow f\left(3x^2\right)<f(3)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow -1<x<1$

γ) Έχουμε $f\left(f^{-1}(x)+2\right)=4=f(3)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=1\Leftrightarrow f^{-1}(x)=f^{-1}(2)\Leftrightarrow x=2$

Θέμα 17

Δίνεται η $g(x)=e^x+x$ και η f όπου ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ότι :

$$e^{f(x)}+f(x)=x \quad \text{και} \quad f(A)=\mathbb{R}$$

i. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
ii. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
iii. Να βρεθεί η αντίστροφη της f.

ΛΥΣΗ

i) Είναι $A=\mathbb{R}$ και για $x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$ οπότε προσθέτοντας έχουμε :

$e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ii) Προφανώς έχουμε ότι $g(f(x))=e^{f(x)}+f(x)$ οπότε η δοσμένη ισότητα γίνεται :

$$e^{f(x)}+f(x)=x\Leftrightarrow g(f(x))=x$$

Με $x_1<x_2\Rightarrow g(f(x_1))<g(f(x_2))\overset{g\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

iii) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι 1 – 1 οπότε ορίζεται η f^{-1}.

Για να βρούμε το τύπο της f^{-1} έχουμε :

$y=f(x)\Leftrightarrow e^y=e^{f(x)}\Leftrightarrow e^y=x-f(x)\Leftrightarrow e^y=x-y\Leftrightarrow x=e^y+y$ άρα η αντίστροφη της f είναι η $f^{-1}(x)=e^x+x$

Θέμα 18

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει ότι :

$$f\left(f(x)-f(y)\right)=x-y$$

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι :
i. $f(0)=0$ ii. $(fof)(x)=x$ iii. $f(x)=x$

ΛΥΣΗ

i) Για $x=y$ παίρνουμε από την υπόθεση $f\left(f(x)-f(x)\right)=x-x \Leftrightarrow f(0)=0$

ii) Για $y=0$ η υπόθεση γίνεται : $f\left(f(x)-f(0)\right)=x-0 \Leftrightarrow f\left(f(x)\right)=x$

iii) Δουλεύουμε με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) \neq x_0$

Αν $f(x_0) > x_0 \overset{\uparrow}{\Rightarrow} f\left(f(x_0)\right) > f(x_0) \Rightarrow x_0 > f(x_0)$ άτοπο

Ομοίως αν $f(x_0) < x_0$ άρα $f(x)=x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 19

Αν για τη συνάρτηση $f: A=(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y \in (0,+\infty)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x>1$. Να δείξετε ότι :

i) $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

ii) Η f γνησίως αύξουσα στο A

iii) $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(y)$ αν $f(A)=A$

iv) Να λυθεί η εξίσωση $f\left(5^{x+1}\right)=f\left(2^x+3^x\right)+f(5)$

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε $y=\frac{1}{x}$ άρα $f(1)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$. Για $x=y=1$ έχουμε $f(1)=0$

οπότε $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

ii) Έστω $x_1 > x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} > 1$ άρα $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) > 0 \Rightarrow f\left(x_1 \frac{1}{x_2}\right) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1) + f\left(\frac{1}{x_2}\right) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A

iii) Επειδή $f(A) = (0, +\infty)$ έχουμε ότι για $x = f(\alpha)$ και $y = f(\beta)$:

$f^{-1}(x+y) = f^{-1}\left(f(\alpha) + f(\beta)\right) = f^{-1}\left(f(\alpha\beta)\right) = \alpha\beta = f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)$

iv) Η εξίσωση είναι ισοδύναμα $f\left(5^{x+1}\right) = f\left(5\left(2^x + 3^x\right)\right) \Leftrightarrow 5^x = 3^x + 2^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^x = 3^x + 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$. Η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα $x = 1$ διότι η συνάρτηση $g(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ διότι $\frac{2}{5} < 1$ και $\frac{3}{5} < 1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Απαντήστε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

Σ Λ

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln x^2$ είναι το $\mathbb{R}$.

Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$ τότε $(f o g)(x) = x$.

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A τότε η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

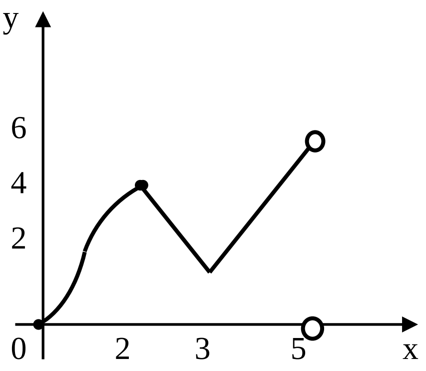
Αν $(f o f)(x) = x$ τότε η f είναι αντιστρέψιμη .

Αν η f είναι 1– 1 τότε η f είναι γνησίως αύξουσα .

Αν η f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$ τότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διέρχεται από το O(0,0) και το A(1,1) τότε είναι γνησίως αύξουσα.

Στη γραφική παράσταση της f βλέπουμε ότι :



- Η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Η f έχει μέγιστη τιμή .
- Η f είναι αντιστρέψιμη .
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [2 , 3] .
- Η f έχει μία ρίζα .
- Η f έχει ελάχιστη τιμή .
- Η f έχει σύνολο τιμών το [0 ,6] .
- Η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει μόνο μία ρίζα .
- Η f είναι άρτια .
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0 , 2] .
- Η f είναι αντιστρέψιμη στο [0 , 2] .

Η f για την οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$f(x^2) = f(2x)$ είναι 1–1 .

Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $x + y = 0$.

Αν η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση ως προς x τότε η f είναι αντιστρέψιμη.

Αν στη γραφική παράσταση της f υπάρχουν μόνο δύο σημεία με την ίδια τεταγμένη τότε αντιστρέφεται.

Η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^*$.

Η $f(x) = x$ έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x) = -x$.

Η $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x & x \le 0 \end{cases}$ είναι 1 – 1 αλλά όχι γνησίως μονότονη.

Αν $f(x) = x^2 - 1$, $x \ge 0$ τότε η αντίστροφή της είναι $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$.

Αν η f αντιστρέψιμη και $f(f(x)) = g(g(x))$ τότε $f = g$.

Η $f(x) = \frac{|x|}{x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

Αν η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(A) = (1,2)$

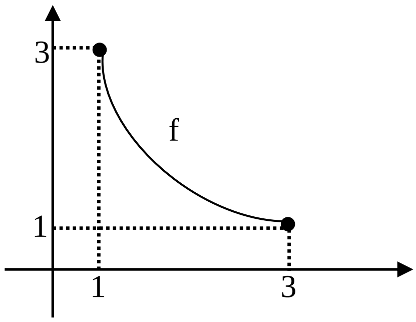
τότε η f έχει μέγιστο .

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ τότε η fof είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ για κάθε $x\in f(A)$.

Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x)=1$ τότε $f(x)=1$ ή $f(x)=-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}: f(x)g(x)=0$ τότε $f(x)=0$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$



α. $(fof)(1)=f^{-1}(3)$

β. $f^{-1}(1)=3$

γ. $f\left(x^2\right)\geq 3$ είναι αδύνατη

Michel Rolle (1652 – 1719)

O Rolle γεννήθηκε στο Άμπερ της Γαλλίας.

O Rolle ήταν πάντα πολύ στην Διοφαντική ανάλυση, το πιο σημαντικό έργο του είναι ένα βιβλίο σχετικά με την Άλγεβρα των εξισώσεων και δημοσιεύθηκε το 1690. Σε αυτό το βιβλίο ο Rolle εδραιώνει το συμβολισμό για την ν-οστή ρίζα πολυωνύμου και αποδεικνύει μια πολυωνυμική έκδοση του θεωρήματος που σήμερα φέρει το όνομα του. (Το Θεώρημα Rolle πήρε την ονομασία του από τον Giusto Bellavitis το 1846) .

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Αν $f(x) = \ln\left(x^2 + e^{2x} - 2e^x + 1\right)$ τότε το πεδίο ορισμού είναι:

Α. $\mathbb{R}$ **Β.** $\mathbb{R}^*$ **Γ.** $(0, +\infty)$ **Δ.** $(1, +\infty)$

Αν f(x) = x τότε η fof ισούται με :

Α. x **Β. f(x)** **Γ.** $\mathbf{x^2}$ **Δ. Δεν υπάρχει**

Οι λύσεις της εξίσωσης $(f(x))^2 = -(f(x))^4$, είναι :

Α. 1 **Β. άπειρες** **Γ. Καμία**

Αν f(x) = ημf(x) + συνf(x) τότε έχει σύνολο τιμών f(A) :

Α. το R **Β. το [-2,2]** **Γ. Δεν γνωρίζω**

Αν η f αντιστρέφεται τότε η συνάρτηση - f είναι :

Α. 1–1 **Β. Γνησίως αύξουσα** **Γ. Αρτια**

Αν $f(x) = x^5$ τότε η αντίστροφη είναι :

Α. $\mathbf{f^{-1}(x)=\sqrt[5]{x}}$	**Β.** $\mathbf{f^{-1}(x)=-\sqrt[5]{x}}$	**Γ.** $\mathbf{f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[5]{x} & x\geq 0\\ \sqrt[5]{-x} & x<0\end{cases}}$

. Έστω $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για $x,y\in\mathbb{R}$:

Α. f(0) = 0	**Β. f(-x) = f(x)**	**Γ. Η f είναι 1–1**

. Αν $f(x)=x^3+x+1$ τότε η τιμή $f^{-1}(1)$ ισούται :

Α. 0	**Β. 1**	**Γ. –1**	**Δ. Δεν υπάρχει**

. Αν $(fog)(x)=x$ τότε :

Α. $\mathbf{f^{-1}=g}$	**Β.** $\mathbf{f^{-1}(x)=x}$	**Γ. Δεν γνωρίζω**

. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $f(f(x))=2000$ τότε :

Α. Η f είναι 1–1	**Β. Η f είναι σταθερή**	**Γ. Δεν γνωρίζω**

. Αν $(fog)(x)=(gof)(x)=x$ τότε :

Α. $\mathbf{f^{-1}=g}$	**Β. Η f είναι περιττή**	**Γ. Η g γνησίως αύξουσα στο** $\mathbb{R}$

. Αν $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$ τότε το πεδίο ορισμού της fog είναι :

Α. $\mathbf{A=(0,+\infty)}$	**Β.** $\mathbf{A}=\mathbb{R}$	**Γ.** $\mathbf{A=(-\infty,0)}$

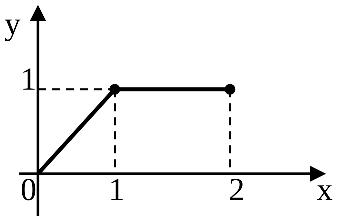
. Αν $f(x)=x^2+2$ και $g(x)=\sqrt{-x}$ τότε η gof είναι :

Α. $\mathbf{\sqrt{-x^2-2}}$	**Β.** $\mathbf{-x+2}$	**Γ. Δεν ορίζεται**

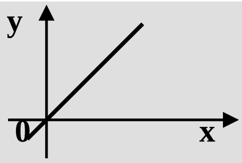
. Αν η f αντιστρέφεται τότε η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^{2001}+f(x)+1$:

Α. Αντιστρέφεται	**Β. Είναι άρτια**	**Γ. Είναι γνησίως αύξουσα στο** $\mathbb{R}$

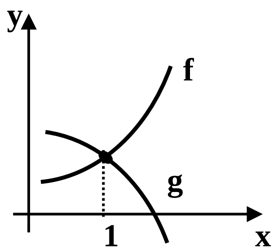
Αν η γραφική παράσταση της f είναι αυτή του σχήματος η συνάρτηση fof έχει σχήμα :



Α. Ίδιο με της f **Β. Δεν γνωρίζω** **Γ.**



Βρείτε το σωστό ισχυρισμό με βάση το σχήμα .



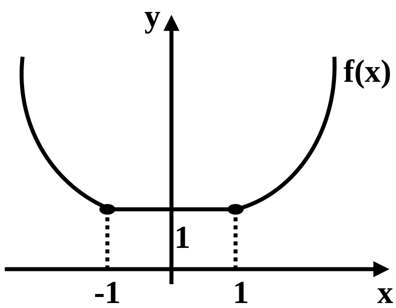
Α. $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ. $f(x) > g(x)$ για $x > 1$.

Δ. $f(x) < g(x)$ για $x < 1$.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f . Ποιές προτάσεις από τις παρακάτω είναι λανθασμένες ;



Α. Η f έχει πεδίο ορισμού το Α = [-2,+ ∞].

Β. Η f έχει σύνολο τιμών το f(A) = [1,+ ∞) .

Γ. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ =[-1,+ ∞).

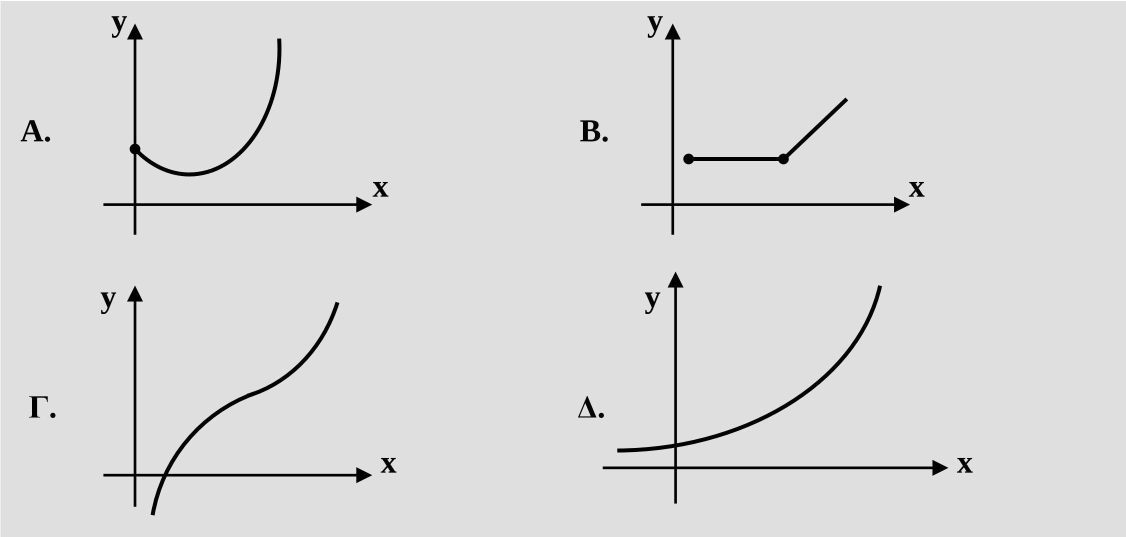
Δ. Η f είναι αντιστρέψιμη.

Ε. Η f έχει ελάχιστη τιμή.

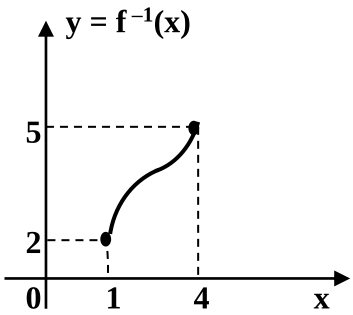
Αν η f είναι αντίστροφη της g τότε η $f\big(g(x)\big)$ ισούται με :

Α. $f(x)g(x)$ **Β. x** **Γ . 1** **Δ. $f^{-1}(x)$**

. Ποιές από τις γραφικές παραστάσεις δείχνουν αντιστρέψιμη συνάρτηση ;



. Με βάση το διπλανό σχήμα βρείτε τον λάθος ισχυρισμό .



A. Το πεδίο ορισμού της f είναι A = [2,5] .

B. Το πεδίο τιμών της f είναι f(A) = [1,4].

Γ. f(2) = 1 .

Δ. Η f γνησίως φθίνουσα στο A.

E. $f^{-1}(4) = 4$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

1. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 25} + \dfrac{1}{\ln x}$
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x^2+4x}{x-2}}$
3. $f(x) = \sqrt{x^5 - x^4}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{\varepsilon\varphi x - 1}$
5. $f(x) = \ln\left(\sqrt{3x-8} - x + 2\right)$

10. $f(x) = \sqrt{\sigma\upsilon\nu x + 1} + \sqrt{-x^2+4x-3}$
11. $f(x) = \ln\left(4e^{2x} - 2e^x + 2020\right)$
12. $f(x) = \ln\left(x - \sqrt{x} + 1\right)$
13. $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x-1)} + \dfrac{1}{\ln\left(x^2+1\right)}$
14. $f(x) = \ln\left(\sigma\upsilon\nu^4 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\right)$

6. $f(x) = \ln\left(\sqrt{x+1}-x+1\right)$

7. $f\left(x\right)=\dfrac{\varepsilon\phi x}{\varepsilon\phi x+1}$

8. $f\left(x\right)=\ln\dfrac{-x^3+x}{x+2}$

9. $f\left(x\right)=\ln\left(-x^3+2x^2-x\right)$

15. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{e^x-e}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}$

16. $f\left(x\right)=\dfrac{x}{-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$

17. $f\left(x\right)=\ln\left(|x|-x\right)$

18. $f\left(x\right)=\sqrt{\sigma\upsilon\nu\left(\sigma\upsilon\nu x\right)-1}$

Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

1. $f(x) = |x^2-2x|$ 2. $f(x) = \ln x^2$ 3. $f(x) = e^{|x|}$

4. $f(x) = \eta\mu x - |\eta\mu x|,\ x\in[-\pi, \pi]$ 5. $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2 & x<2 \\ 2x & x\geq 2\end{cases}$

6. $f(x) = |e^x-1|$ 7. $f\left(x\right)=|x^2+x+2|$ 8. $f\left(x\right)=|\ln x-1|$

9. $f\left(x\right)=|\sigma\upsilon\nu x|$, $A=[0,2\pi]$ 10. $f\left(x\right)=|x^2-4x+3|$

Να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις f , g είναι ίσες.

i. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{-x+1}}$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{-x+1}}$ ii. $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2\ln x$

iii. $f\left(x\right)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, $g\left(x\right)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

iv. $f\left(x\right)=\ln\left(-x^2+x\right)$, $g\left(x\right)=\ln x+\ln\left(1-x\right)$

v. $f\left(x\right)=4\ln x-\ln\left(x^2-x\right)$ και $g\left(x\right)=\ln\dfrac{x^3}{x-1}$

Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες.

i) $f(x) = \dfrac{2\alpha x}{x+4-\alpha}$, $g(x) = \dfrac{2x}{x+3\alpha}$

ii) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$, $g(x) = \dfrac{\left(x-\alpha\right)\sqrt{x^2}}{x-\alpha^2}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{x^2-3\lambda x-3\lambda-1}$ για $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να ορισθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2+\alpha x+1)$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+4x+4}-x$. Να εκφραστεί ο τύπος της συνάρτησης χωρίς ριζικό και να χαραχθεί η γραφική της παράσταση.

Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων και από αυτές να προσδιοριστεί το σύνολο τιμών τους : i. $f(x)=\left|e^x-1\right|$

ii. $f(x)=\ln x+\left|\ln x\right|$ iii. $f(x)=\min\left\{x,x^2\right\}$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\sqrt{\ln^2 x-\ln x}$ γ) $g(x)=\sqrt{e^{2x}-4e^x+3}$

β) $h(\alpha)=\ln\left(x^2-x+\alpha\right)$ δ) $\phi(t)=\sqrt{t-x}$

Για τις συναρτησεις f , g ισχύει ότι : $f(x)=1+g^2(x)-2xg(x)+x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση της g τέμνει την διχοτόμο $y=x$ σε κάποιο σημείο , να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή .

I) Να βρεθεί η μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων : α. $f(x)=x^3+2x$

β. $g(x)=e^{-x}-x$ γ. $h(x)=x+\sqrt{x}$ δ. $\phi(x)=x^3+2\ln x$ ε. $F(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

II) Να λυθούν οι εξισώσεις: $f(x)=3$, $g(x)=1$, $h(x)=12$,

$\varphi(x)=1$, $F(x)=\dfrac{e}{e+1}$

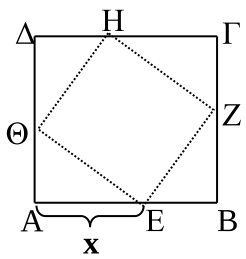
Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ο $\nu\in\mathbb{N}^*$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2 f(x)\geq \nu x^3$ να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να λυθεί η εξίσωση :

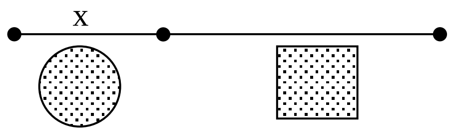
$$f\left(x^2+2\right)-f(4x-1)=x^2-4x+3$$

Να βρεθούν τα ακρότατα των : $f(x)=2\sqrt{x-1}+1$, $g(x)=3\sigma\upsilon\nu(x-1)+1$, $h(x)=2x^4+x^2+1$, $\phi(x)=-2\eta\mu x+1$, $F(x)=\sqrt{\ln^2 x+1}+1$.

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να εκφράσετε το εμβαδόν του εγγεγραμμένου τετραγώνου ΕΖΗΘ ως συνάρτηση του x.



Σύρμα μήκους 20cm κόβεται σε δυο κομμάτια και κατασκευάζουμε ένα κύκλο και ένα τετράγωνο. Να γίνει το άθροισμα των εμβαδών τους συνάρτηση.



Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που διέρχονται από τα σημεία Α(0,1), Β(1,3) και ισχύει $g\left(f^2(x)\right) \le g\left(4f(x)-3\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν η g είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, να βρεθούν τα ακρότατα της f.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2(x-2)^2 + 2$ έχει ελάχιστο σε δυο θέσεις
και να βρεθούν οι θετικοί α, β αν $f(\alpha^2) + \beta^{12} - 4\beta^9 + 4\beta^6 = 2$.
Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $f\left(e^{x^2}+1\right) = 2$.

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 4 και τυχόν σημείο του Μ.
Με πλευρές ΑΜ, ΜΒ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα. Να εκφραστεί το άθροισμα των εμβαδών τους ως συνάρτηση μιας μεταβλητής.

Να βρεθεί η gof αν :

i. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

ii. $f(x) = \ln x$, $g(x) = e^x$

iii. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \ln(-x)$

iv. $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$, $g(x) = \sqrt{-x}$

v. $f(x) = ημx$, $g(x) = \dfrac{π}{6}$

vi. $f(x) = e^{-x} - x$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

vii. $f(x) = 2e^x + 3$, $g(x) = \ln\dfrac{x-3}{2}$

viii. $f(x) = ημx$, $g(x) = συνx$

i) Αν $f(x) = \ln x$ να οριστεί η συνάρτηση fof και η fo(fof).

ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Να ορισθούν οι συναρτήσεις fof και fo(fof).

Αν $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \ge 1 \\ x+1 & , \ x < 1 \end{cases}$ και $g(x) = e^x$ να ορίσετε την fog.

Έστω $f(x)=\ln x$ και $g(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, να ορίσετε τη σύνθεση της συνάρτησης g με τη συνάρτηση f .

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\varepsilon\varphi x$ και $g(x)=\frac{\pi}{4}\eta\mu x$.
Να ορίσετε τη συνάρτηση fog και να δείξετε ότι η fog είναι περιττή.
Στη συνέχεια να δείξετε ότι $\left|(fog)(x)\right|\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρεθεί η f(x) αν : i) $(fog)(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = ex$
ii) $(fog)(x)=3x$ και $g(x)=e^{-x}+1$
iii) $(fog)(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=x^2+2x$, $x>1$

Αν η συνάρτηση f διέρχεται από τα σημεία A(0,1) , B(1,3) και ισχύει

$$f^2(x)\leq 4f(x)-3 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} .$$

α) Να βρεθούν τα ακρότατα της f.
β) Να δείξετε ότι $\left|f(\beta)-f(\alpha)\right|\leq 2$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
γ) Να βρείτε το ελάχιστο της $g(x)=f^4(x)+f^2(x+1)+10$.

Να βρείτε την fog αν $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ και $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$,

Έστω $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα και $g:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ γνησίως φθίνουσα. Να δειχθεί ότι η $\frac{f}{g}$ είναι αντιστρέψιμη και να λυθεί η ανίσωση : $f(x^3)g(x^2)-f(x^2)g(x^3)<0$, στη συνέχεια να δείξετε ότι η εξίσωση $f(g(x))+g(x)=1$ έχει το πολύ μια λύση .

Να ορισθούν οι συναρτήσεις fog και gof.
i) $f(x) = 2x^2 - 1$ / $A_f=[-4,1]$ και $g(x) = 3x + 1$ / $A_g=[-2,5]$
ii) f(x) = συνx και $g(x)=\sqrt{1-4x^2}$
iii) $f(x)=\sqrt{x^2-5}$ και $g(x)=\sqrt{x-2}$

i) Δίνονται οι συναρτήσεις $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $g(x)=3e^x+4$ και $fog:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
με $(f\,o\,g)(x)=x^2+3\ln x$. Να βρεθεί ο τύπος της f
ii) Για κάθε $x,y\in[0,1]$ ισχύει : $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$ και $f(0)=1$, $f(1)=0$, να βρεθεί ο τύπος της f και στη συνέχεια η fog αν $g(x)=ημ^2x$.

Έστω $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει :
i) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ να δείξετε ότι η f είναι περιττή. Αν δίνεται ότι για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $f(x)>0$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
ii) $g(xy)=g(x)+g(y)$ να δείξετε ότι η g είναι άρτια.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\dfrac{e}{x}$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $x^x=e^e$, $x>0$.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln\dfrac{x^2}{20-x}>\dfrac{e}{x^2}-\dfrac{e}{20-x}$ με $x\in(0,20)$.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=2x^2-1$ και $g(x)=4x^3-3x$ ορισμένες στο $A=[-1,1]$. Να ορισθούν οι συναρτήσεις fog, gof και να δειχθεί ότι $fog=gof$.

Έστω συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^4)+f(x^2)=f(x)+f(x^3)$ για $x>0$.
β) Αν $x<0$ να δείξετε ότι $f(2x)+f(4x)<f(x)+f(3x)$

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{1-x}$ και $g(x)=\ln(x-1)$. Να ορισθούν οι συναρτήσεις fog και gof.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-e$, $A=\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Να λυθεί η εξίσωση $e^x-e^{x^2}=x^2-x$.
γ) Να λυθεί το σύστημα (Σ) : $\begin{cases} e^a+a=\beta+e \\ e^\beta+\beta=\alpha+e \end{cases}$

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,3]\to\mathbb{R}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h με $h(x)=f(x^2-1)$. Ομοίως αν $g(x)=f(e^x)$, με $A_f=[0,1]$.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν για κάθε άλλη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $gof=fog$ να δειχθεί ότι η f είναι ταυτοτική.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ και $g(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. Να ορισθεί η gof και να αποδειχθεί ότι είναι ταυτοτική στο $\mathbb{R}$.

Αν $f(x)=x^2+2x+2$ και $g(x)=-x^2+2x$, δείξτε ότι η εξίσωση : $(fog)(x)=(gof)(x)$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

Έστω $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ και η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όπου ισχύει : $fog=gof$. Αν η C_g τέμνει την $y=x$ σε ένα σημείο να δείξετε ότι $\alpha^2+1=2(\alpha+2\beta)$

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει :

$$2\cdot|f(x)-f(y)|\le|x-y|$$

Να βρεθεί η μονοτονία των συναρτήσεων $g(x)=f(x)+x$, $h(x)=f(x)-x$

Να προσδιοριστεί συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ που ο τύπος της ικανοποιεί τη σχέση : i) $2f(x)+3f(\frac{1}{x})=x^5$ ii) $f(x)+xf(-x)=x^3$

iii) $f(x)+xf(2-x)=x$ iv) $f(e^x)-2f(e^{-x})=e^x$

Έστω η γνησίως αύξουσα $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όπου ισχύει : $f(e^x-x)+f(e^x-1)-3=x$

Να λυθούν : i) $f(f(x))=f(2)$ ii) $f(f(e^x-1))>f(2)$

Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι : $f(f(x))=x^2-x+1$, να βρεθεί το $f(1)$ και να εξετάσετε αν η f είναι $1-1$.

Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε συμμετρικό διάστημα Δ = (-α , α) γράφεται σαν άθροισμα μίας άρτιας και μιας περιττής.

Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή και παίρνει ελάχιστη τιμή , τότε αποδείξτε ότι παίρνει και μέγιστη τιμή.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ με $A = (1, +\infty)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Α .

β) Αν $\alpha, \beta \in A$ με α < β, να δείξετε ότι $\alpha^{\alpha} < \beta^{\beta}$.

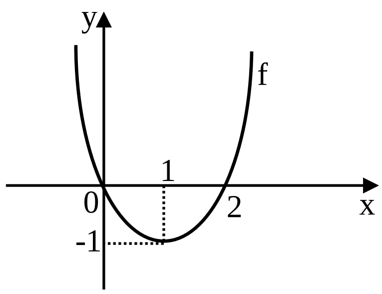
γ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(x^2+1\right)^{x^2+1} = (2x+4)^{2x+4}$ με $x \in A$.

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου για κάθε $x , y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι :

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{f}(\mathrm{y})\right) = \mathrm{f}\left(\mathrm{f}(\mathrm{x})\right) - \mathrm{y}$$

Να δείξετε ότι : i. $\mathrm{f}(0) = 0$ ii. $(\mathrm{fof})(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$ iii. Η f είναι περιττή

Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



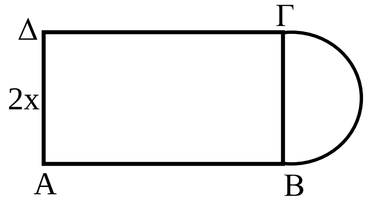
α) Να βρεθεί η μονοτονία και το σύνολο τιμών της f.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -2 + \sigma\upsilon\nu x$ είναι αδύνατη.

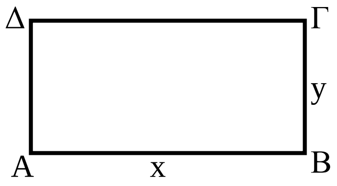
γ) Να λυθεί η ανίσωση $f\left(2x^2\right) > 0$ για $x \in [2, +\infty)$

δ) Να εξετάσετε αν αντιστρέφεται η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x^2 - 2x$

Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει δυο κορυφές στον x΄x και δυο κορυφές στην συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Να γίνει το εμβαδόν του συνάρτηση.



Ο στίβος του διπλανού σχήματος αποτελείται από ορθογώνιο και ημικύκλιο περιμέτρου 4m. Να γίνει το εμβαδόν του συνάρτηση.



Μεταβλητό ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει σταθερή περίμετρο Π = 4m. Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε ως συνάρτηση μιας μεταβλητής και στη συνέχεια να δείξετε ότι $E(x) \le 1$ για κάθε $x \in (0,4)$.

β) Μεταβλητό ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει σταθερό εμβαδόν Ε = 1. Να εκφράσετε τη περίμετρο Π ως συνάρτηση μιας μεταβλητής και να δείξετε ότι $\Pi(x) \ge 4$.

Ένα καΐκι εκτελεί τη διαδρομή Άνδρος – Τήνος (5Km) με σταθερή ταχύτητα U. Αν το κόστος για τα καύσιμα είναι 10 € /min και τα λειτουργικά έξοδα 5 € /min να εκφράσετε το κόστος ως συνάρτηση μιας μεταβλητής .

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι «1 – 1» :

1) $f(x) = \ln(x^4 - x^2 + 1)$ 2) $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ 3) $f(x) = 2e^{x^7} + 3$

4) $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu 2x$ 5) $f(x) = -x^2 + 8x$ 6) $f(x) = 1 - \sqrt{2x-2}$

7) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ 8) $f(x) = 2x^3 - 8$ 9) $f(x) = x^2 - 2x$, $x > 1$

10) $f(x) = x^2 - 2x$, $x \ge 1$ 11) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \sigma\upsilon\nu 1$ 12) $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$

13) $f(x) = -x^7 + 64x + 2007$ 14) $f(x) = 2x^3 + 3x$ 15) $f(x) = 2x^7 + 5x + 1$

Να βρεθεί η αντίστροφη των συναρτήσεων :

1) $f(x) = c$ 2) $f(x) = -2x^2 + 5x$ 3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $x > 2$

4) $f(x) = x^2 - 2x$, $x \ge 1$ 5) $f(x) = \ln\frac{1}{x}$ 6) $f(x) = 2e^{-4x} + e$

7) $f(x) = \eta\mu 4x$ 8) $f(x) = x + \sqrt{x}$ 9) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

10) $f(x) = \ln(x - e)$ 11) $f(x) = e^x + e$ 12) $f(x) = -x^2 + 1$, $x > 0$

13) $f(x) = \ln\frac{-x}{x-1}$ 14) $f(x) = 1 + \sqrt{-x}$ 15) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1-x}}$

16) $f\left(x\right)=\dfrac{e-x}{e+x}$ 17) $f\left(x\right)=4+\sqrt{x-4}$ 18) $f\left(x\right)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

Να ορισθεί η αντίστροφη της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$.

α) Δίνεται η συνάρτηση $f:[2,+\infty)\to[2,+\infty)$ με $f(x)=x^2-2x+3$.
Να ορισθεί αν υπάρχει η f^{-1}. β) Ομοίως αν $f(x)=\left(x-2\right)^2+2$, $x\geq 2$.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
ii. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
iii. Να ορισθεί η f^{-1}

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}-\{-1\}$ με $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$.

i. Να βρεθεί η f^{-1} και να δειχθεί ότι $f=f^{-1}$.
ii. Να ορισθούν οι fof, fof^{-1}. Τι παρατηρείτε ;

Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}$ με $\beta\neq-\alpha^2$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη β) Να βρεθεί η f^{-1}
γ) Να δείξετε ότι $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\left\{\alpha\right\}$.

α) Να δείξετε ότι η $h\left(x\right)=e^x+x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι 1–1, να δειχθεί ότι η $g(x)=e^{f(x)}+f(x)$ είναι 1–1.

Να οριστεί αν υπάρχει η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 1\\ x & x<1\end{cases}$.

Να βρεθεί η αντίστροφη της : i) $f(x)=x^3-6x^2+12x$ ii) $f\left(x\right)=e^{2x}+2e^{x}$

Αν $f\left(A\right)=\mathbb{R}$, να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτηση f όπου :

$$f^3\left(x\right)+f\left(x\right)=x^3+2 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

i) Αν οι συναρτήσεις f , g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι 1–1 , να δειχθεί ότι η gof είναι 1–1

ii) Να αποδειχθεί ότι αν η fog είναι 1–1 τότε και η g είναι 1–1 και να λυθεί η εξίσωση $g\left(f(x)+5^x\right)=g\left(f(x)+2^x+3^x\right)$.

i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι : $f(x)+xf(-x)=x^3+x$, να βρεθεί ο τύπος της f και να εξετάσετε αν είναι αντιστρέψιμη .

ii) Για $x\in\mathbb{R}$ ισχύει : $f(x)+xf(-x)=x^3-x^4$. Να βρεθεί η αντίστροφη της f (x).

Δίνεται η συνάρτηση $f: A\to[0,+\infty)$ με $f(x)=\ln(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}})$.

i. Να δειχθεί ότι A=[0,1) .

ii. Να οριστεί αν υπάρχει η f^{-1}.

Έστω $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ και $g:(-\infty,0)\to(-\infty,0)$ αντιστρέψιμες συναρτήσεις . Να βρεθεί η αντίστροφη της $h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{αν } x>0 \\ g(x) & \text{αν } x<0 \end{cases}$

α) Έστω ότι $(fof)(x)=e^{-x}-1+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την τιμή $f(0)$.

β) Αν ισχύει ότι $(fof)(x)=f(x)+\ln x$, για κάθε $x>0$ να δείξετε ότι η f τέμνει την διχοτόμο y = x τουλάχιστον σε ένα σημείο

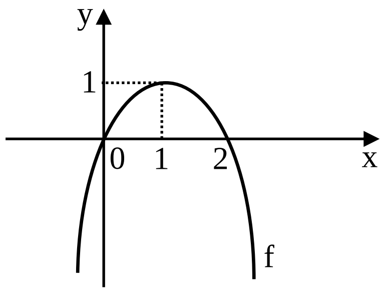
Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f\left(f(x)\right)=f^3(x)+x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1 και να λύσετε την εξίσωση :

$$f\left(\ln\frac{x^2+1}{x}\right)=f\left(e^x-e^{x^2+1}\right)$$

Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση της $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η μονοτονία της f και να συγκριθούν οι αριθμοί $f(3), f(4)$

β) Να λυθεί η ανίσωση $f(\eta\mu x)\le f(\sigma\upsilon\nu x)$ στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.



γ) Να λυθεί η ανίσωση $f\left(e^{x}+1\right)>f\left(e^{-x}+1\right)$.

δ) Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $2f\left(x\right)=1$;

Έστω η $\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)=\mathrm{x}^{4}-2\alpha\mathrm{x}^{3}+\alpha^{2}\mathrm{x}^{2}+\alpha$. Να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη
και να βρεθεί το ελάχιστο της .

Έστω f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση τέμνει την ευθεία
y = x μόνο στα σημεία O(0,0) και A(1,1).

α) Να λυθεί η ανίσωση $f\left(f\left(x\right)\right)>f\left(-x\right)$.

β) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των f και f^{-1}.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}\left(f\left(x\right)+e^{x-1}-1\right)=1$.

Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{x^{3}}{x^{2}+1}$ με $\mathrm{A}=\mathbb{R}$ και η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία
ισχύει ότι $g^{3}\left(x\right)=xg^{2}\left(x\right)+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g\left(\mathrm{A}\right)=\mathbb{R}=f\left(\mathrm{A}\right)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1 .

β) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f , g είναι αντίστροφες.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $g\left(\dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\right)-g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.

Έστω $\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως μονότονη που διέρχεται από τα σημεία A (1,3) ,
B (2,2) . Να λυθούν οι : i) $\mathrm{f}\left(\eta\mu^{2}\mathrm{x}+\eta\mu\mathrm{x}+1\right)=3$

ii) $\mathrm{f}^{2}\left(\mathrm{x}\right)+6>5\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)$ iii) $\mathrm{f}^{-1}\left(\mathrm{x}^{2}+\mathrm{x}\right)=1$

Έστω $\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως μονότονη που διέρχεται από τα σημεία A (1 , 2) ,
B (2 , 1) . Να λυθούν οι : i) $\left(\mathrm{fof}\right)\left(\mathrm{x}^{3}\right)=1$ ii) $\left(\mathrm{fof}\right)\left(\mathrm{x}\right)\geq 2$

α) Έστω ότι για κάθε $\mathrm{x}\in\mathbb{R}$ ισχύει $\left(\mathrm{fof}\right)\left(\mathrm{x}\right)+\left(\mathrm{f}(\mathrm{x})\right)^{7}=7\mathrm{x}+1$,
να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Αφού αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathrm{g}(\mathrm{x})=2\mathrm{x}^{9}+\mathrm{x}-3$ είναι 1-1 στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $f\left(g(x^9+2x)\right)=f\left(g(3+x-x^9)\right)$.

Έστω $f\left(f\left(x\right)\right)=\ln x$ για $x>0$. Να δείξετε ότι : i) Η f είναι $1-1$
ii) Η εξίσωση $f\left(x\right)=1$ έχει μια λύση iii) $f\left(\ln x\right)=\ln f\left(x\right)$
v) Να δειχθεί ότι $f^{-1}(x)=e^{f(x)}$

Έστω η μη σταθερή $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όπου για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$ ισχύει :

$$f\left(x+y\right)=\kappa f\left(x\right)+f\left(y\right) \quad \text{με } \kappa\in\mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι : i) $\kappa=1$ ii) η f είναι περιττή
iii) Με δεδομένο ότι για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $f\left(x\right)>0$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
iv) Αν η f έχει μοναδική ρίζα να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ισχύει ότι : $f^{-1}\left(x+y\right)=f^{-1}\left(x\right)+f^{-1}\left(y\right)$, αν $f\left(A\right)=\mathbb{R}$

i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\left(fog\right)\left(x\right)=\left(gof\right)\left(x\right)=x$.
Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και $f^{-1}=g$.
ii) Αν f, g αντιστρέψιμες να δειχθεί ότι η fog είναι αντιστρέψιμη και

$$\left(fog\right)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$$

iii) Να δείξετε ότι η $h\left(x\right)=e^{f(x)}+f\left(x\right)$ είναι αντιστρέψιμη

Έστω η συνάρτηση $f(x)=1+\sqrt{x-1}$
i) Να βρεθεί η f^{-1}
ii) Να γίνει η γραφική παράσταση των f, f^{-1}
iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$
iv) Να δείξετε με ένα παράδειγμα ότι οι εξισώσεις $f(x)=f^{-1}(x)$ και $f(x)=x$ δεν είναι πάντα ισοδύναμες.

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $(fof)(x)=-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι :
i. Η f είναι ¨ 1-1 ¨ ii. $f^{-1}=-f$ iii. Η f δεν είναι γνησίως μονότονη

Να βρεθεί η αντίστροφη των : i. $f\left(x\right)=e^{x}-e^{-x}$
ii. $f\left(x\right)=\ln(e^{x}+1)-x$ iii. $f\left(x\right)=\ln(ex)\cdot(1-\ln x)$, $x\geq e$

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι (fog) (x) = (gof) (x) = 2x , να δειχθεί ότι $2f^{-1} = g$.

Να βρεθούν τα κοινά σημεία των f , f^{-1} στις περιπτώσεις :

i) $f(x) = 2x^3 + 1$ ii) $f(x) = x^5 + 2x - 2$ iii) $f(x) = e^{x-2} + x - 1$

iv) $f(x) = (x-1)^2 + 1$, $x \geq 1$ v) $f(x) = \ln x + 2x - 1$

Δίνεται η $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, να δείξετε ότι έχει αντίστροφη την συνάρτηση με τύπο : $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$.

α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $(f(x))^3 + f(x) - x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(A) = \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x) = x^3 + x$.

β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $2e^{f(x)} + 3f(x) = 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(A) = \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντιστροφή της .

i) Υπάρχει ή όχι συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη , τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει : $f(f(x)) + x = 0$;

ii) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η fof αντιστρέφεται, τότε αντιστρέφεται και η f

Αν για κάθε x > 0 και $f(x) > 0$, ισχύει ότι $f(x) = \ln(x + f(x))$, να δειχθεί ότι η f είναι 1 – 1 και $f^{-1}(x) = e^x - x$.

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ με $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Να οριστεί αν υπάρχει η αντίστροφη της f.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της ii. Να οριστεί η αντίστροφη αν υπάρχει

Να βρεθούν α, β $\in \mathbb{R}$ ώστε $f = f^{-1}$ αν $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$.

Έστω ότι για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι : $(fof)(x)+(gof)(x)=x$. Να δείξετε ότι η f
αντιστρέφεται και ισχύει ότι : $g(x)=f^{-1}(x)-f(x)$. Αν η g τέμνει τον $x'x$ τότε οι f , f^{-1} έχουν κοινό σημείο.

Δίνεται η $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

i. Να δειχθεί ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
ii. Να δειχθεί ότι η C_f τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία το πολύ σε ένα σημείο .
iii. Να βρεθεί η f^{-1} .

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$, να βρεθούν η μονοτονία , τα ακρότατα
και η αντίστροφη της .

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αντιστρέψιμη και περιττή με $f(A)=\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι η f^{-1} είναι περιττή στο $\mathbb{R}$,

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ και $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x , y \in\mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι :

α) $f(1)=1$ β) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$

γ) Αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα το 1 , τότε η f είναι 1 – 1

δ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία ε: $y = x$ σε ένα το πολύ σημείο , τότε η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι αντιστρέψιμη .

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(f(x))=1$. Να δειχθεί ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $f(1) = 1$.

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = x^3+x+1$ και $f(A)=\mathbb{R}$.

i. Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$

iii. Να υπολογιστεί ο αριθμός $f^{-1}(-1)$ iv. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(-x^2+4\right) > 0$

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}+\ln x+2x-2$ με $A=(0,+\infty)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και να βρεθεί η τιμή $f^{-1}(1)$.

β) Να λυθεί η ανίσωση $e^{x^2-1}+\ln x+2x^2 > e^{x-1}+2x$.

γ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των f, f^{-1} .

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{x}+\ln(x+1)-1$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η τιμή $f^{-1}(0)$.

β) Να λυθεί η ανίσωση $e^{x}+\ln x^{e} > e$ για $x > 0$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $e^{x^2}=e^{x+2}+\ln\dfrac{x+3}{x^2+1}$.

Έστω $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $f(x)=\dfrac{f(f(x))}{x}$ για κάθε $x>0$.

Να δειχθεί ότι : i. Η f είναι 1–1 ii. $f(1)=1$ iii. $f(A)=(0,+\infty)$

Μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις :

A. $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$,

B. Υπάρχει $x_o\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(2x_o)=-1$.

Να δειχθεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει :

i. $f(-x)=f(x)$ ii. $f(x)=f(x+4x_o)$ iii. $f(x)\in[-1,1]$.

Μία συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y\in(0,+\infty)$

i. Να υπολογιστεί το $f(1)$ και να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$.

ii. Να δειχθεί ότι για κάθε $x, y\in(0,+\infty)$ ισχύει $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

iii. Αν η f έχει μοναδική ρίζα , να δειχθεί ότι είναι αντιστρέψιμη

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση :

$$f(y-x)+2x-y=\ln(e^x+e^y) \quad \text{για κάθε } x, y\in\mathbb{R}$$

i. Να δείξετε ότι $f(x)=x+\ln(e^x+1)$

ii. Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει κοινά σημεία με την αντίστροφη της

iii. Να βρεθεί η αντίστροφη της

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=6x+2e^x-2$.

i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(0)$ και να λυθεί η εξίσωση $e^x=1-3x$.

ii. Αν για την συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $e^{g(x)}+3g(x)=x+1$, να δείξετε ότι έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον x΄x

iii. Να λυθεί η ανίσωση : $e^{3(gof)(x)}+e^{(gof)(x)}>2$

Να βρεθεί η αντίστροφη της f αν ικανοποιεί τη σχέση : $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x$.

Έστω $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει :

$$(gof)(x)=x^3$$

Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ολικά ακρότατα.

Έστω f γνησίως μονότονη στο $A=[1,3]$ με $f(1)=1$ και $f(2)=4$. Αν η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού $A_g=(-\infty,4)$, να βρεθεί το A_{gof}

Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όπου ισχύει $f(g(x))=x^3+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η $h(x)=x^3+x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη.

γ) Αν $f(A)=\mathbb{R}$, να βρεθεί το ελάχιστο της $F(x)=f^2(x)-2f(x)+2$.

Έστω $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$.

Να δειχθεί ότι : i. $f(0)=1$ ii. $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$

iii. Αν η f είναι αντιστρέψιμη και $f(A)=\mathbb{R}$ να δειχθεί ότι :

$$f^{-1}(xy)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y) \quad \text{για κάθε } x, y\in\mathbb{R}$$

iv. Αν για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $f(x)>1$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\,f(y)}$ για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$.

i. Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = 1$, να δειχθεί ότι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Θεωρώντας $g(x) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$, να δειχθεί ότι $g(x+y) = g(x)\,g(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 + 4x + 7$, $A = \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η $f^{-1}(7)$.

β) Με βάση τη μονοτονία της $g(x) = f(x) + x$, να λυθεί η ανίσωση :

$$4\left(x^9 + (x-2)^3\right) > 5(2-x) - 5x^3$$

γ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των f και f^{-1}

Δίνεται ότι ισχύει $e^{f(x)} + 2f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $A = f(A) = \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η f^{-1}.

β) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f^{-1} και f είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x^3) - f^{-1}(x) > x - x^3$.

δ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των f και f^{-1}.

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$(f o f)(x) = 2x - f(x) \quad \text{και} \quad f(A) = \mathbb{R}.$$

i) Να δειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και $2f^{-1}(x) = f(x) + x$

ii) Αν f γνησίως μονότονη και $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, να δείξετε ότι :

$$f(x) = x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) - f(y) = f(x-y) \quad \text{για κάθε} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

και η εξίσωση $f(x) = 0$ που έχει μοναδική ρίζα.

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$

γ) Αν $f(x)<0$ για κάθε $x<0$ να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $f\left(2e^{-x}+x\right)+f\left(e^{x}\right)<f\left(e^{-x}+x\right)$

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(A)=\mathbb{R}$ όπου ισχύει: $\left|f(x)-f(y)\right|\geq|x-y|$ για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και ισχύει:

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|\leq|x-y|$$

στη συνέχεια να βρείτε τη μονοτονία της $g(x)=f^{-1}(x)+3x$

Έστω $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με f περιττή όπου ισχύει για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$ ότι:

$$f(x+y)-g(x-y)=6x^2y+2y^3+2y$$

α) Να δείξετε ότι $f=g$ και $f(0)=0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3+x$ και να δειχθεί ότι αντιστρέφεται

γ) Να ορίσετε την hof αν $h(x)=\ln(x-2)$ και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση: $(hof)(x) = =-x^3+8+3\ln 2$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+2x-e-1$, $A=(0,+\infty)$

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την $f^{-1}(1-e)$.

β) Με βάση τη μονοτονία της $g(x)=f(x)+x$, να λυθεί η ανίσωση

$$\ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)>3\left(x-x^2-1\right)$$

γ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των f και f^{-1}.

Έστω f γνησίως μονότονη στο $A=(0,+\infty)$ με $f(x)>0$ και $2f(2)=f(1)$. α) Να λυθεί η ανίσωση $2f\left(2x^2\right)>f(1)$

β) Να λυθεί η εξίσωση $f\left(e^{-\eta\mu^2 x}\right)-f\left(e^{-x^2}\right)=f\left(e^{\eta\mu^2 x}\right)-f\left(e^{x^2}\right)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της ii. Να δειχθεί ότι είναι περιττή
iii. Να δειχθεί ότι αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1}

Έστω ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $2f(x)+f^3(x)=3e^{-x}$

i) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $f(x)>0$ και $f(0)=1$

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

iii) Να λυθεί η ανίσωση : $f\left(f\left(-x\right)\right) > \dfrac{3e^{-1}}{2+f^{2}\left(1\right)}$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθεί η αντίστροφη των συναρτήσεων :

α) $f\left(x\right)=\sqrt{e^{x}-1}$ β) $f\left(x\right)=\ln\left(\ln x\right)$ γ) $f\left(x\right)=\sqrt{\ln x}$

δ) $f\left(x\right)=x+2\sqrt{x}+1$ ε) $f\left(x\right)=\ln^{2}x-\ln x^{2}+1$, $x\geq e$

στ) $f\left(x\right)=\ln\dfrac{x}{e-x}$ ζ) $f\left(x\right)=\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}$ η) $f\left(x\right)=e^{x}-e^{-x}$

θ) $f\left(x\right)=\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)$ ι) $f\left(x\right)=\dfrac{1-e^{2x}}{2e^{x}}$ κ) $f\left(x\right)=\dfrac{ax+1}{x-\alpha}$

Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{-x+1}-x$

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και έχει μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε $e^{-x^{3}+1}-e^{-x-5}>x^{3}-x-6$

Έστω η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με θετικές τιμές που τέμνουν την y = x στο $x_0=1$.

i) Να δείξετε ότι η $h\left(x\right)=\left(fog\right)\left(x\right)-f\left(x\right)$ γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Να λυθεί η $f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(x\right)$ iii) Να λυθεί η ανίσωση $f\left(g\left(\dfrac{x+1}{2x-2}\right)\right)>1$

iv) Να δείξετε ότι $f\left(\alpha^{2}\right)g\left(0\right)\geq f\left(0\right)g\left(\alpha^{2}\right)$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως μονότονη που διέρχεται από τα σημεία A(1 , 2) , B(2 , 3) . Να λυθούν : α) $f\left(f^{-1}\left(1+e^{x-2}\right)-1\right)=2$ β) $f^{-1}\left(f\left(x^{3}+x\right)-1\right)>1$

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $f\left(0\right)\neq 0$. Να δείξετε ότι :

α) $f\left(x\right)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ β) $f\left(x\right)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) $f(0)=1$ δ) $f(x)f(-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ε) Αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα , τότε η f αντιστρέφεται και ισχύει : $f^{-1}(xy)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ για κάθε x , y , xy $\in f(A)$

Έστω οι γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις f , fog στο $\mathbb{R}$ όπου η g τέμνει τον x΄x στο A(2,0) . Να βρείτε τη μονοτονία της g και να λυθούν :

$$g(e^{x-2}+1)=-g(x) \quad \text{και} \quad g(e^{x-2}+1)>-g(x)$$

Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και η $f(x)=g^5(x)+(gog)(x)$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι ισχύει : $(fog^{-1})(x)=x^5+g(x)$

ii) Αν η g διέρχεται από το σημείο A(1,1) να λυθεί η εξίσωση : $x^5+g(x)=2$

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+2x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη β) Να βρεθεί η $f^{-1}(0)$

γ) Να βρεθεί η μονοτονία της $g(x)=f(x)+x$ και στη συνέχεια να βρεθούν τα κοινά σημεία των f, f^{-1} .

Έστω ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_g=(0,+\infty)$ που διέρχεται από το σημείο A(1,-2).

i) Να δείξετε ότι η $f(x)=g(x)-\ln x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_f=(0,+\infty)$.

ii) Να λυθεί η εξίσωση $g(x)=2x-4$.

iii) Να λυθεί η ανίσωση $g(x^2)<2\ln x-2$.

Έστω συναρτήσεις f , g γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$ με $f(x)>0$, $g(x)>0$
και $f(1)=g(1)=1$. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+2g(x)=3f(x)g(x)$.

Έστω ότι $f(x-y)=f(x)-f(y)$ για κάθε x , y$\in\mathbb{R}$ και για κάθε $\alpha>0$ έχουμε $f(a)>0$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii) Να λυθεί η ανίσωση $f(x+1)+f(x-1)\geq 2f(2-x^2)$.

Έστω η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ και η γνησίως μονότονη g στο $[0,1]$ με $g(0)=1$ και $g(1)=0$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=f\left(g(x)\right)$.

Έστω ότι ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ότι $f(x)+\ln f(x)=x$, $f(\mathrm{A})=(0,+\infty)$.

i) Να δείξετε ότι $f^{-1}(x)=\ln x+x$ ii) Να λυθεί η ανίσωση $\mathrm{x}^2-\mathrm{x}>-\ln\mathrm{x}$

iii) Να λυθεί η εξίσωση $x^2+2\ln x=e^2+2\ln e$.

iv) Να λυθεί η ανίσωση $\ln(x\ln x)<e^x+x$, για x > 1.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2x+\ln\left(x^2+1\right)$ με $\mathrm{A}=[0,+\infty)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α και να βρεθούν τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι $e^{-2x}\le x^2+1$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $2\left(x^3-x-6\right)=\ln\dfrac{(x+6)^2+1}{x^6+1}$.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ και $g(x)=\kappa-\dfrac{1}{e^x+1}$.

Αν οι συναρτήσεις f , g είναι ίσες :

α) Να δείξετε ότι κ = 1 και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί η αντίστροφη της f .

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση h ώστε $(f o h)(x)=2+\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x+1}{x+2}>\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}+f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ στο $(-1,+\infty)$.