Θέμα 9

Έστω f , g παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$ για τις οποίες ισχύουν :

i) $f(\alpha)=g(\alpha)$

ii) $f'(x)<g'(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$

Να δειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ οπότε για $x\in(\alpha,\beta)$ $h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$

x	α	β
h(x)	↓	

Έτσι για:

$x>\alpha\Rightarrow h(x)<h(\alpha)\Rightarrow f(x)-g(x)<f(\alpha)-g(\alpha)\Rightarrow f(x)-g(x)<0\Rightarrow f(x)<g(x)$

άρα η C_f είναι κάτω από την C_g.

Θέμα 10

Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & \text{αν } x\neq 0\\ 1 & \text{αν } x=0\end{cases}$

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και έχουμε $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$.

Θέτουμε $g(x)=xe^x-e^x+1$, $A=\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=xe^x$ οπότε για $g'(x)>0\Leftrightarrow x>0$, ενώ $g'(x)<0\Leftrightarrow x<0$

Άρα η g έχει ελάχιστο τη τιμή $g(0)=0$ οπότε $g(x)\geq 0$ άρα $f'(x)\geq 0$,

δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Εργασία: Να λυθεί η ανίσωση: $x^2\left(e^{\eta\mu^2 x}-1\right)+\sigma\upsilon\nu^2 x\left(e^{x^2}-1\right)<e^{x^2}-1$

Θέμα 11

Δείξτε ότι δεν υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^{2\nu+1}+x^3+2x^2+3x=\kappa$, $\nu \in \mathbb{N}$ να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=x^{2\nu+1}+x^3+2x^2+3x-\kappa$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι : $f'(x)=(2\nu+1)x^{2\nu}+3x^2+4x+3$. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι η $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Θέμα 12

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν ισχύει $f'(0)>0$ να δειχθεί ότι υπάρχει $\alpha>0$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta=(-\alpha,\alpha)$.

ΛΥΣΗ

Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ έχουμε ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο 0. Έτσι είναι :
$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=f'(0)>0$, άρα οι τιμές του $f'(x)$ είναι θετικές σε μια περιοχή του οπότε θα υπάρχει $\alpha>0$ ώστε για $x \in(-\alpha,\alpha)$ $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow$ στο Δ.

Θέμα 13

Να δειχθεί ότι η εξίσωση :
$\alpha^{2x}+(\alpha-1)^{2x}=(2\alpha^2-2\alpha+1)^x$ με $\alpha>1$ έχει μοναδική λύση .

ΛΥΣΗ

Είναι : $\alpha^2>0,\ (\alpha-1)^2>0,\ 2\alpha^2-2\alpha+1>0$ οπότε η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα :

$$\alpha^{2x}+\left((\alpha-1)^2\right)^x=(2\alpha^2-2\alpha+1)^x \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^2}{2\alpha^2-2\alpha+1}\right)^x+\left(\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{2\alpha^2-2\alpha+1}\right)^x-1=0.$$

Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα το $x=1$.

Θεωρούμε $f(x)=\left(\dfrac{\alpha^2}{2\alpha^2-2\alpha+1}\right)^x+\left(\dfrac{\alpha^2-2\alpha+1}{2\alpha^2-2\alpha+1}\right)^x-1$ τότε είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(\frac{\alpha^2}{2\alpha^2-2\alpha+1}\right)^x \ln\frac{\alpha^2}{2\alpha^2-2\alpha+1}+\left(\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{2\alpha^2-2\alpha+1}\right)^x \ln\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{2\alpha^2-2\alpha+1}<0 \text{ διότι}$$

$\dfrac{\alpha^2}{2\alpha^2-2\alpha+1}<1$, $\dfrac{\alpha^2-2\alpha+1}{2\alpha^2-2\alpha+1}<1$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε έχει μοναδική λύση x = 1.

Θέμα 14

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)$, $A=\mathbb{R}$. Να βρείτε τη μονοτονία της f' και να λύσετε την ανίσωση $(e+1)e^{f(2f'(x))}<e$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι $f'(x)=\dfrac{1}{e^x+1}>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης $f''(x)=\dfrac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Η ανίσωση γίνεται $f\left(2f'(x)\right)<\ln\dfrac{e}{e+1}\Leftrightarrow f\left(2f'(x)\right)<f(1)\Leftrightarrow f'(x)<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

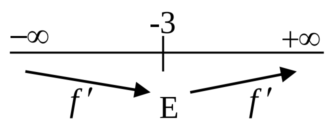
$\Leftrightarrow f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow x>0$.

Θέμα 15

Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=(x+1)e^x-2x$ και να λύσετε την εξίσωση : $x\ln(ex)+2x>xe^{x-1}+2\ln x+2$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι $f'(x)=e^x(x+2)-2$, $f''(x)=e^x(x+3)$ άρα $f''(x)>0\Leftrightarrow x>-3$ και $f''(x)<0\Leftrightarrow x<-3$



Η f' έχει ελάχιστο $f'(-3)=-e^{-3}-2<0$.

Επίσης για x > 0 $\Rightarrow f'(x)>0$ και για $x\in(-3,0)$ είναι $f'(x)<0$.

Αν $A_1=(-\infty,-3]$ τότε $f'(A_1)=\left[-e^{-3}-2,-2\right)$ δηλαδή $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ το $f(A)=[0,+\infty)$.

Η ανίσωση γίνεται $(1+\ln x)e^{\ln x}-2\ln x>(x-1+1)e^{x-1}-2(x-1)\Leftrightarrow$

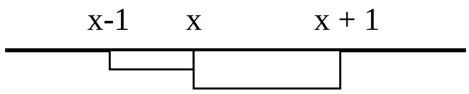
$\Leftrightarrow f(\ln x)>f(x-1)\Leftrightarrow \ln x<x-1\Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

Θέμα 16

Έστω ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2020$
Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$
και στη συνέχεια να δείξετε ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής λόγω παραγωγισιμότητας οπότε εφαρμόζει το ΘΜΤ διαστήματα : $[x-1, x], [x, x+1]$ και έχουμε:



$f'(x_1) = f(x) - f(x-1)$, $f'(x_2) = f(x+1) - f(x)$.

Όμως από τη μονοτονία έχουμε $f'(x_1) < f'(x) < f'(x_2)$ και προκύπτει το ζητούμενο.

Αν θέσουμε x + 1 = t είναι $t \to +\infty$ διότι $x \to +\infty$ όποτε έχουμε :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2020$ όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x-1) = 2020$ κατά συνέπεια
το $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$ και από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει το ζητούμενο.

Θέμα 17

Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = -1$ και $f(x)f'(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να βρεθεί ο τύπος $f(x)$.

ii) Να λυθεί η εξίσωση : $f(x) = x + e^x - 2$.

iii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x f(x)\right)$.

iv) Να δείξετε ότι $f(x) \geq -e^{x/2}$ για $x \geq 0$ και να λυθεί η εξίσωση :

$$e^x = x^2 + \sigma\upsilon\nu x \ , \ x \geq 0$$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε ότι $x \in \mathbb{R}$: $f(x)f'(x) = x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 2x \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)' = \left(x^2\right)'$

άρα $f^2(x) = x^2 + c$

για x = 0 είναι c = 1 άρα $f^2(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{x^2+1}$

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ρίζα οπότε διατηρεί πρόσημο και επειδή $f(0)=-1<0$ άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $f(x)=-\sqrt{x^2+1}$

ii) Η εξίσωση γίνεται $f(x)=x+e^x-2 \Leftrightarrow -\sqrt{x^2+1}=x+e^x-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x+x+\sqrt{x^2+1}-2=0$

Προφανής ρίζα είναι η x = 0 και θεωρώντας $g(x)=e^x+x+\sqrt{x^2+1}-2$ / $A=\mathbb{R}$

για τη μονοτονία έχουμε $g'(x)=e^x+1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=e^x+\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}>0$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε έχουμε μοναδική ρίζα το 0.

iii) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^x\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^x(-x)\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x_2}}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}\overset{DLH}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$

iv) Για $x\geq 0$ η ανισότητα γίνεται : $f(x)\geq -e^{x/2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{e^x} \Leftrightarrow e^x\geq x^2+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x^2+1}\geq 1$.

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $A=[0,+\infty)$ και $g'(x)=\dfrac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο Α οπότε για $x\geq 0 \Rightarrow g(x)\geq 1$.

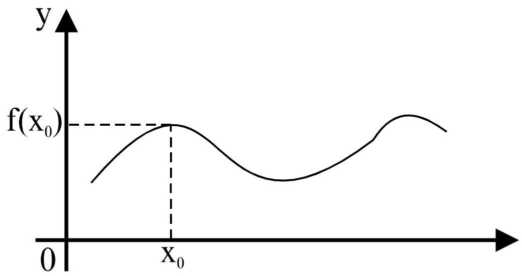
Η εξίσωση γίνεται $e^x=x^2+\text{συν}x \Leftrightarrow e^x-x^2-1=\text{συν}x-1$, $x\geq 0$.

Όμως από το προηγούμενο ερώτημα $e^x-x^2-1\geq 0$ και $\text{συν}x-1\leq 0$ άρα η εξίσωση αληθεύει μόνο για x = 0.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

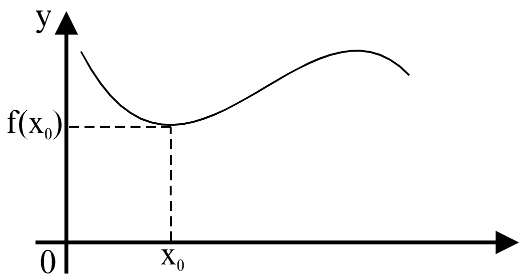
Ορισμοί

i. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μέγιστου ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.



Αν η ανισότητα $f(x) \le f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$ τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο ή απλά μέγιστο, το $f(x_0)$.

ii. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.



Αν η ανισότητα $f(x) \ge f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$ τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο ή απλά ελάχιστο, το $f(x_0)$.

iii. Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται τοπικά ακρότατα αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται θέσεις τοπικών ακρότατων.

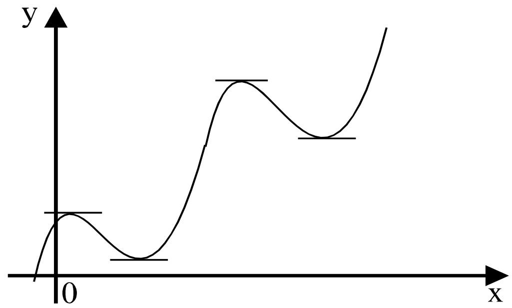
Σχόλια

i. Αν μία συνάρτηση f έχει μέγιστο, τότε αυτό είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f.
Όμως το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f δεν είναι υποχρεωτικά και το μέγιστο της f.

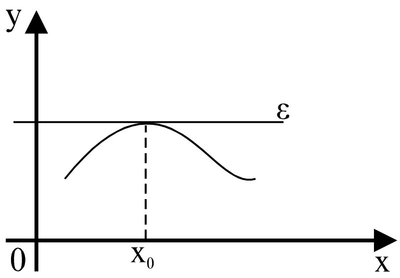
ii. Αν μία συνάρτηση f έχει ελάχιστο, τότε αυτό είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα της f.

Όμως το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα της f δεν είναι υποχρεωτικά και το ελάχιστο της f.

iii. Ένα τοπικό μέγιστο της f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.



Θεώρημα Fermat



Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό τότε: $f'(x_0)=0$

Παρατηρήσεις

- Το αντίστροφο του θεωρήματος Fermat δεν ισχύει δηλαδή αν η f ορισμένη στο Δ και στο εσωτερικό σημείο $x_0 \in \Delta$ ισχύει: $f'(x_0)=0$ τότε αυτό δεν σημαίνει ότι το x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου της f.
- Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και στο εσωτερικό σημείο $x_0 \in \Delta$ η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε η f δεν είναι υποχρεωτικό να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Ορισμός

Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και $x_0 \in A$. Το σημείο x_0 λέγεται κρίσιμο σημείο της f όταν:

- *το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του A*
- $f'(x_0)=0$ *ή η f δεν παραγωγίζεται στο x_0.*

▷ *Πιθανές θέσεις ακρότατων*:

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι:

- τα κρίσιμα σημεία της f
- τα άκρα του κλειστού διαστήματος Δ

▷ *Θεώρημα (Κριτήριο 1ης παραγώγου)*

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α,β) και $x_0 \in(\alpha,\beta)$ ένα κρίσιμο σημείο της f, στο οποίο αυτή είναι συνεχής.

i. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ii. Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

Αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνήσια μονότονη στο (α,β).

▷ *Θεωρημα (Κριτηριο 2ης παραγωγου)*

Έστω f παραγωγίσιμη στο Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ με $f'(x_0)=0$ τότε:

- Αν $f''(x_0)>0$ το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο
- Αν $f''(x_0)<0$ το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο

ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΤΙΜΩΝ ΜΙΑΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο $\Delta=[\alpha,\beta]$. Για να βρούμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f στο Δ εργαζόμαστε ως εξής:

i. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f

ii. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα του διαστήματος Δ.

iii.Από αυτές τις τιμές η μικρότερη είναι το ελάχιστο της f και η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο της f.

Άρα το πεδίο τιμών της f είναι το διάστημα $f(\Delta)=[\mu,M]$ *όπου μ το ελάχιστο και M το μέγιστο της f.*

Θέμα 1

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα : i. $f(x)=x^4-2x^2$
ii. $f(x)=|x-\nu|$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ iii. $f(x)=e^{2x}-4e^x$

ΛΥΣΗ

i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$. Η μονοτονία είναι :

	-1	0	1	
-		+	-	+
↘		↗	↘	↗

οπότε η f παρουσιάζει στο $x_0=-1$ τοπικό ελάχιστο το $f(-1)=-1$ στο $x_0=0$ τοπικό μέγιστο το $f(0)=0$ και στο $x_0=1$ τοπικό ελάχιστο το $f(1)=-1$.

ii) Η f είναι συνεχής στο A=$\mathbb{R}$ και ο τύπος γίνεται : $f(x)=\begin{cases} x-\nu & \text{αν } x\ge\nu \\ -x+\nu & \text{αν } x<\nu \end{cases}$

Για $x\in(\nu,+\infty)$ είναι $f'(x)=1>0$

Για $x\in(-\infty,\nu)$ είναι $f'(x)=-1<0$ οπότε έχουμε:

ν	
–	+
↓	↑

T.E

και έτσι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=\nu$ το $f(\nu)=0$.

iii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με : $f'(x)=2e^{2x}-4e^x=2e^x(e^x-2)$

Έχουμε ότι $f'(x)>0\Leftrightarrow e^x-2>0\Leftrightarrow e^x>2\Leftrightarrow x>\ln 2$.

ln2	
–	+
↓	↑

T.E

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για x = ln2 την $f(\ln 2)=-4$

Θέμα 2

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα

i. $f(x)=x^{\frac{1}{x}}\quad x>0$ **ii.** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

iii. $f(x)=ημ^2x-\sqrt{2}ημx\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

ΛΥΣΗ

i) Η f έχει τύπο $f(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$ οπότε είναι για κάθε $x\in(0,+\infty)$

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}(-\ln x+1).$$

Το πρόσημο της f΄ είναι : $f'(x)>0\Leftrightarrow -\ln x+1>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$.

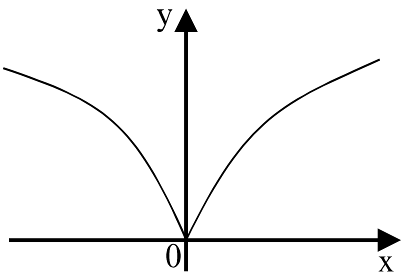
	e	
	+	–
	↑	↓

Τ.Μ.

Οπότε έχουμε μέγιστο για $x=e$ την $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$.

ii) Η $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με

$$f'(x)=\left(\left(x^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^2\right)^{\frac{1}{3}-1}\cdot\left(x^2\right)'=\frac{1}{3}\left(x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2}{3}x\cdot\frac{1}{\left(x^2\right)^{\frac{2}{3}}}$$



	0	
	–	+
	↓	↑

Τ.Ε.

Άρα η f έχει ελάχιστο για $x=0$ και $f(0)=0$.

iii) Για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε ότι : $f'(x)=2ημxσυνx-\sqrt{2}συνx=2συνx\left(ημx-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
–	+	
↓	↑	
Τ.Μ	Τ.Ε.	Τ.Μ.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στα $x_0 = 0$ την $f(0)=0$ και $x=\frac{\pi}{2}$ την τιμή $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\sqrt{2}$. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=\frac{\pi}{4}$ τιμή $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$.

Θέμα 3

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x)=\begin{cases} e^x - ex & x \le 1 \\ x\ln x & x>1 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Η f συνεχής στο $A=\mathbb{R}$ οπότε έχουμε :

Για $x \in (-\infty,1)$ είναι : $f'(x)=e^x - e$ και έχουμε ότι : $f'(x)<0 \Leftrightarrow e^x<e \Leftrightarrow x<1$

Για $x\in(1,+\infty)$ είναι : $f'(x)=\ln x+1$ και έχουμε ότι : $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>e^{-1}$

οπότε ο πίνακας μεταβολών είναι :

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
f′	–	+
f	↓	↑
	$E_{ολ}$	

Έτσι βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=0$.

Θέμα 4

Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε να μην έχει ακρότατα η συνάρτηση:

$$f(x)=x^3+3\alpha x^2+3x$$

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι: $f'(x)=3x^2+6\alpha x+3=3(x^2+2\alpha x+1)$.

Έχουμε ότι η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου: $4\alpha^2-4=4(\alpha-1)(\alpha+1)$.

α	-1	1	
Δ	+	–	+

i. Αν $\alpha\in(-1,1)$ τότε $\Delta<0$ οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $f'(x)>0$ δηλαδή η f↑ στο $\mathbb{R}$ και έτσι δεν έχει ακρότατα.

ii. Αν $\alpha=1$ ή $\alpha=-1$ τότε $\Delta=0$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ ή $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ οπότε η f↑ στο $\mathbb{R}$ αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

iii. Αν $\alpha\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ τότε $\Delta>0$ οπότε παρουσιάζει ακρότατα.

Άρα όταν $\alpha\in[-1,1]$ η f δεν έχει ακρότατα.

Θέμα 5

Δίνεται η $f(x)=\sqrt{-x^2+2x\nu}$ και ο $\nu \in \mathbb{N}^*$

i. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f.

ii. Αν Α, Β, Γ τα αντίστοιχα σημεία των ακρότατων να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα Α, Β, Γ.

ΛΥΣΗ

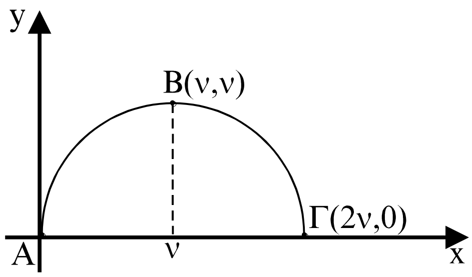
i. Το πεδίο ορισμού της f είναι : $[0,2\nu]$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,2\nu]$ και για κάθε

$$x \in (0,2\nu) \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{-x^2+2\nu x}}(-2x+2\nu)=\frac{-x+\nu}{\sqrt{-x^2+2\nu x}}$$

0	ν	2ν
	+	−
	↑	↓
Ε	Μ	Ε
(0)	(ν)	(0)

ii. Τα Α , Β , Γ έχουν συντεταγμένες $A(0,0)$, $B(\nu,\nu)$ $\Gamma(2\nu,0)$. Ο κύκλος C που διέρχεται από τα Α, Β, Γ έχει το κέντρο του Κ στο μέσο του ΑΓ οπότε είναι $K(\nu,0)$. Η ακτίνα του είναι: $R=\frac{1}{2}(A\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot 2\nu=\nu$. Έτσι ο C έχει εξίσωση: $(x-\nu)^2+y^2=\nu^2$.



Θέμα 6

Να βρεθούν οι $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x)=\alpha\ln x+\beta x^2+x$ να έχει τοπικά ακρότατα στα $x_1=1$ και $x_2=\frac{1}{2}$.

ΛΥΣΗ

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A=(0,+\infty)$ με $f'(x)=\alpha\frac{1}{x}+2\beta x+1$. Η f παρουσιάζει ακρότατα στα $x_1=1$ και $x_2=\frac{1}{2}$ όταν $f'(1)=0$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ και η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1 και $\frac{1}{2}$ οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta+1=0 \\ 2\alpha+\beta+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\frac{1}{3} \\ \beta=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Η f' γίνεται: $f'(x)=\dfrac{-2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3x}$ όπου προφανώς αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών της $1,\frac{1}{2}$.

Θέμα 7

Έστω $f(x)=x^2-2\lambda x+\lambda^2-3\lambda$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f.

ii. Να δειχθεί ότι για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ανήκουν σε μία σταθερή ευθεία.

ΛΥΣΗ

i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι $f'(x)=2x-2\lambda=2(x-\lambda)$

$-\infty$	λ	$+\infty$
$-$		$+$
$\downarrow$		$\uparrow$
	Ε	

Άρα για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ η f παρουσιάζει ακρότατο για $x=\lambda$ την τιμή $f(\lambda)=-3\lambda$.

ii. Τα ακρότατα της f έχουν συντεταγμένες $A(\lambda,-3\lambda)$ οπότε θέτουμε :

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=-3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=-3x \end{cases}$$

Άρα τα σημεία Α ανήκουν στην ευθεία $y=-3x$.

Θέμα 8

Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$\frac{1}{2}\left[f(x)\right]^4 + 3\left[f(x)\right]^3 + \left[f(x)\right]^2 + 1 = 6e^{x-1} + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 5 \quad (1)$$

Να αποδειχθεί ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι η f στο σημείο x_0 έχει τοπικό ακρότατο. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε ισχύει σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ότι: $f'(x_0) = 0$.

Από τη σχέση (1) έχουμε :

$$\left[\frac{1}{2}\left[f(x)\right]^4 + 3\left[f(x)\right]^3 + \left[f(x)\right]^2 + 1\right]' = \left(6e^{x-1} + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 5\right)' \Leftrightarrow$$

$$2\left[f(x)\right]^3 \cdot f'(x) + 9\left[f(x)\right]^2 \cdot f'(x) + 2f(x)f'(x) = 6e^{x-1} + 6x^2 + 6x + 6 \quad (2)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η (2) για $x = x_0$ γίνεται :

$$2\left[f(x_0)\right]^3 \cdot f'(x_0) + 9\left[f(x_0)\right]^2 \cdot f'(x_0) + 2f(x_0) \cdot f'(x_0) = 6\left(e^{x_0-1} + x_0^2 + x_0 + 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x_0-1} + x_0^2 + x_0 + 1 = 0 \quad (3)$$

Όμως για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύουν $\left.\begin{aligned} x_0^2 + x_0 + 1 &> 0 \\ e^{x_0-1} &> 0 \end{aligned}\right\}$ άρα η (3) είναι αδύνατη.

Δηλαδή η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Θέμα 9

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να δειχθεί ότι δεν έχει ακρότατα όταν ισχύει: $f\left(f(x)\right) + e^x = e^{f(x)} + x$ **και** $f'(0) = 1$ **.**

ΛΥΣΗ

Επειδή η f παραγωγίσιμη έχουμε για $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) + e^x \quad (1)$$

Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε από θεώρημα Fermat έχουμε ότι:

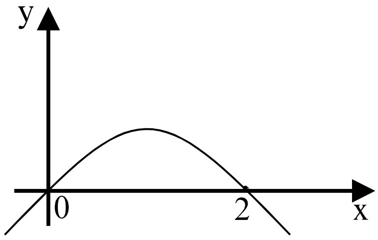
$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$ δηλαδή $f'(0) = 0$ άτοπο.

Άρα η f δεν έχει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 10

Στο παρακάτω σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f΄. Τι συμπεράσματα προκύπτουν για την f στα σημεία x = 0 και x = 2.

ΛΥΣΗ



Προφανώς η f είναι συνεχής στο x = 0. Με βάση το σχήμα βλέπουμε ότι για x <0 είναι $f'(x)<0$ ενώ για x >0 είναι $f'(x)>0$ δηλαδή:

x	0	
f΄	–	+
f	↓	↑

Οπότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x = 0. Όμοια δουλεύοντας βρίσκουμε ότι για x = 2 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Θέμα 11

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση : $x \cdot e^{x+1}+1=0$ (1) έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Η (1) έχει προφανή ρίζα την $x=-1$. Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδική.
Έστω η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^{x+1}+1$, $A=\mathbb{R}$.

Είναι : $f'(x)=e^{x+1}+x\cdot e^{x+1}=e^{x+1}(x+1)$

x	$-\infty$ -1	$+\infty$
f΄	–	+
f	↓	↑

Τ.Ε=Ο.Ε.

Η f παρουσιάζει στο $x=-1$ ολικό ελάχιστο. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ ισχύει $f(x)>f(-1) \Leftrightarrow f(x)>0$. Δηλαδή η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=-1$.

Θέμα 12

Να βρεθεί το πλήθος των ριζών
i. $x^2-3=-2x^3-6x$ ii. $x^4-4x+3=0$

ΛΥΣΗ

i) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=2x^3+x^2+6x-3$ με $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι : $f'(x)=6x^2+2x+6=2(3x^2+x+3)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
διότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι Δ=1 - 36 < 0 οπότε η f↑ στο $\mathbb{R}$.

Στο διάστημα $[-1,1]$ η f εφαρμόζει το θεώρημα Bolzano διότι είναι συνεχής και $f(1)=6>0$ και $f(-1)=-10<0$ οπότε υπάρχει $\rho\in(-1,1)$ ώστε $f(\rho)=0$.

Συνεπώς η f έχει ρίζα ρ και λόγω μονοτονίας είναι μοναδική.

ii) Έστω η $f(x)=x^4-4x+3$ με $A=\mathbb{R}$. Προφανώς $f(1)=0$ οπότε η f έχει ρίζα το 1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι $f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)$

$-\infty$ 1 $+\infty$	
–	+

Η $f\downarrow$ στο $(-\infty,1]$ οπότε έχει μοναδική ρίζα σε αυτό το 1. Όμοια στο $[1,+\infty)$ άρα η f έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ το 1.

Θέμα 13

Να βρεθεί το σύνολο τιμών

i. $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-e^{-x}}$, $A=(0,1]$ **ii.** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

ΛΥΣΗ

i) Για κάθε $x\in(0,1]$ έχουμε ότι :

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-e^{-x})-e^x(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}=\frac{-2e^xe^{-x}}{(e^x-e^{-x})^2}=\frac{-2}{(e^x-e^{-x})^2}<0$$

Οπότε η $f\downarrow$ στο $A=(0,1]$ οπότε το σύνολο τιμών είναι :

$$f(A)=\left[f(1),\lim_{x\to0}f(x)\right) \text{ και } f(1)=\frac{e}{e-e^{-1}} \ , \ \lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{e^x-e^{-x}}=+\infty .$$

Άρα έχουμε $f(A)=\left[\dfrac{e}{e-e^{-1}},+\infty\right)$

ii) Για κάθε $x\in A=(0,+\infty)$ έχουμε ότι : $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. Βρίσκουμε την μονοτονία:

$f'(x)>0\Leftrightarrow 1-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$

0 e $+\infty$	
+	–
↑	↓

$M_{ολ.}$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=e$ το $f(e)=\frac{1}{e}$ δηλαδή για κάθε $x\in A$

$f(x)\le\frac{1}{e}$ και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ οπότε $f(A)=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$.

Θέμα 14

Η είσπραξη από την πώληση x μονάδων ενός προϊόντος είναι :

$$\mathbf{E(x)=-x^4+50000x}\ \text{δρχ.}$$

Αν το κόστος μιας μονάδας είναι 18000 ευρώ να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους όταν πωληθούν 10 μονάδες προϊόντος . Πότε έχουμε μέγιστο κέρδος;

ΛΥΣΗ

Έστω ότι πωλούνται x μονάδες προϊόντος τότε το κόστος των x μονάδων είναι:
$K(x)=18000x$ και το κέρδος $P(x)$

$P(x)=E(x)-K(x)=-x^4+50000x-18000x=-x^4+32000x$ ευρώ.

Ο ρυθμός μεταβολής είναι : $P'(x)=-4x^3+32000=-4(x^3-8000)$

Για $x=10$ έχουμε : $P'(10)=-4(1000-8000)=28000$.

x	0	20	$+\infty$
P΄(x)	+		–
P(x)	↑		↓
		M	

Άρα όταν πωληθούν 20 προϊόντα έχουμε μέγιστο κέρδος .

Θέμα 15

Ένα αντιπυρετικό φάρμακο υπάρχει σε δισκία και σταγόνες . Η μεταβολή της θερμοκρασίας ως προς το χρόνο με τη χορήγηση δισκίων είναι: $\Delta(t)=-t^2e^{-t}$ ενώ με σταγόνες είναι : $\Sigma(t)=\frac{1}{6}t^6-\frac{1}{5}t^5+t^2-2t-\frac{1}{6}$. Ποια από τις δύο μορφές είναι αποτελεσματικότερη;

ΛΥΣΗ

Αποτελεσματικότερη μορφή φαρμάκου είναι αυτή που σε μικρότερο χρόνο κατεβάζει τη θερμοκρασία πιο χαμηλά. Βρίσκουμε την ελάχιστη θερμοκρασία στις δύο μορφές.

$\Delta'(t)=-2te^{-t}+t^2e^{-t}=te^{-t}(-2+t)$

0	2	$+\infty$
–		+
↓		↑
	E	

Άρα σε χρόνο $t=2$ με τα δισκία έχουμε ελάχιστο $\Delta(2)=-4e^{-2}=-\frac{4}{e^2}$.

$\Sigma'(t)=t^5-t^4+2t-2=(t-1)(t^4+2)$.

0	1	+∞
−	+	
↓	↑	
	Ε	

Άρα σε χρόνο t=1 με τις σταγόνες έχουμε ελάχιστο $\Sigma(1)=-\frac{6}{5}<-\frac{4}{e^2}=\Delta(2)$.

Έτσι η μορφή των σταγόνων σε λιγότερο χρόνο t=1 παρουσιάζει μεγαλύτερη μείωση της θερμοκρασίας δηλαδή είναι πιο αποτελεσματική.

Θέμα 16

Η τιμή πώλησης Π ενός θρανίου εξαρτάται από την ποσότητα x των θρανίων που πωλούνται με βάση τον τύπο $\Pi(x)=\alpha x+\beta$. Όταν η τιμή ενός θρανίου είναι 10 ευρώ πωλούνται 100 θρανία ενώ όταν είναι 15 ευρώ πωλούνται 50. Να βρεθεί η τιμή πώλησης ενός προϊόντος ώστε να μεγιστοποιούνται οι εισπράξεις.

ΛΥΣΗ

Με βάση την υπόθεση έχουμε ότι :

$$\begin{cases}\Pi(100)=10\\ \Pi(50)=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}100\alpha+\beta=10\\ 50\alpha+\beta=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{10}\\ \beta=20\end{cases}$$

Άρα $\Pi=\Pi(x)=-\frac{1}{10}x+20\Leftrightarrow x=-10\Pi+200$.

Οι εισπράξεις Ε από την πώληση x προϊόντων είναι :

$E=x\cdot\Pi=(-10\Pi+200)\Pi=-10\Pi^2+200\Pi$. Οπότε οι εισπράξεις Ε ως συνάρτηση του Π είναι: $E(\Pi)=-10\Pi^2+200\Pi$ άρα : $E'(\Pi)=-20\Pi^2+200=-20(\Pi-10)$

0	10	+∞
+	−	
↑	↓	
	Μ	

Έτσι για τιμή πώλησης $\Pi=10$ μεγιστοποιούνται οι εισπράξεις.

Θέμα 17

Η αύξηση της πίεσης ατόμου με υπόταση μία ώρα μετά τη λήψη α gr φαρμάκου δίνεται από τον τύπο $P(\alpha)=-8e^{-2}\alpha^2+4e^{-2\alpha}$. Για ποια δόση φαρμάκου ο ρυθμός αύξησης της πίεσης είναι μέγιστος;

ΛΥΣΗ

Ο ρυθμός αύξησης της πίεσης είναι $P'(\alpha)=-16e^{-2}\alpha-8e^{-2\alpha}$.

Αναζητούμε τη μέγιστη τιμή του ρυθμού $P'(\alpha)$ οπότε έχουμε :

$(P'(\alpha))'=P''(\alpha)=\left(-16e^{-2}\alpha-8e^{-2\alpha}\right)'=-16e^{-2}+16e^{-2\alpha}$. Το πρόσημο της $P(\alpha)''$

είναι: $P(\alpha)''>0 \Leftrightarrow -16\left(e^{-2}-e^{-2\alpha}\right)>0 \Leftrightarrow e^{-2}<e^{-2\alpha} \Leftrightarrow -2<-2\alpha \Leftrightarrow 2>2\alpha \Leftrightarrow \alpha<1$

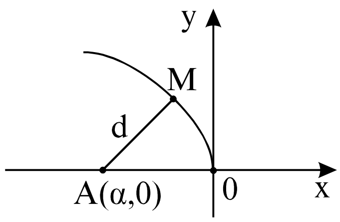
α	0	1
P''	+	-
P'	↑	↓
	M	

Έτσι ο ρυθμός μεγιστοποιείται για δόση $\alpha=1$ gr.

Θέμα 18

Δίνεται το σημείο $A(\alpha,0)$ και η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\alpha x}$ με $\alpha<0$. Να βρεθεί σημείο Μ της C_f που απέχει ελάχιστη απόσταση από το Α. Στη συνέχεια να δειχθεί ότι η ευθεία ΑΜ είναι κάθετη στην εφαπτόμενη της C_f στο Μ.

ΛΥΣΗ



Έστω τυχαίο σημείο $M(x,f(x))$ $x\le 0$ τότε η απόσταση (ΑΜ) είναι :

$$d(A,M)=\sqrt{(x-\alpha)^2+\left(\sqrt{\alpha x}-0\right)^2}=\sqrt{x^2-\alpha x+\alpha^2}$$

Αναζητώντας το ελάχιστο της d θέτουμε :

$g(x)=\sqrt{x^2-\alpha x+\alpha^2}$ με $x\le 0$ και είναι

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-\alpha x+\alpha^2}}(2x-\alpha)=\frac{2x-\alpha}{2\sqrt{x^2-\alpha x+\alpha^2}}.$$

$-\infty$	$\frac{\alpha}{2}$	0
-	+	
↓	↑	
	E	

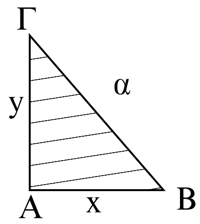
Άρα η d γίνεται ελάχιστη όταν $x=\dfrac{\alpha}{2}$ και το αντίστοιχο σημείο Μ είναι $M\left(\dfrac{\alpha}{2},-\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)$. Αν ε η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο Μ τότε έχουμε :

$$\lambda_{\varepsilon}\cdot\lambda_{AM}=f'\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\dfrac{-\alpha}{\sqrt{2}}}{\dfrac{\alpha}{2}-\alpha}=\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha\dfrac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{\dfrac{-\alpha}{\sqrt{2}}}{-\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=-1 \quad \text{οπότε} \quad \varepsilon\perp AM.$$

Θέμα 19

Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα που έχουν την ίδια υποτείνουσα να βρεθεί πιο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

ΛΥΣΗ



Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με σταθερή υποτείνουσα $(B\Gamma)=\alpha$ και μεταβλητές κάθετες πλευρές $(AB)=x,\ (A\Gamma)=y$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε :

$x^2+y^2=\alpha^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{\alpha^2-x^2}$ με $x\in(0,\alpha)$.

Έτσι το εμβαδόν γίνεται : $E=\dfrac{1}{2}xy=\dfrac{1}{2}x\sqrt{\alpha^2-x^2}$ και έχουμε :

$$E'(x)=\left(\frac{1}{2}x\sqrt{\alpha^2-x^2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2-x^2}+\frac{-2x^2}{2\sqrt{\alpha^2-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2-2x^2}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$$

0 $\qquad$ $\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$	α
+	-
↑	↓

Άρα το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο όταν $x=\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$ και $y=\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$ (ισοσκελές).

Θέμα 20

Να δειχθούν οι ανισώσεις:

i. $e^{x-1}\geq x \quad x\in\mathbb{R}$ $\qquad$ **ii.** $\ln(x-\nu+1)\leq x-\nu$ **με** $\nu\in\mathbb{N}^*$ **και** $x>\nu-1$

ΛΥΣΗ

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}-x$ με $A=\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=e^{x-1}-1$ οπότε για τη μονοτονία έχουμε :

$f'(x)>0\Leftrightarrow e^{x-1}-1>0\Leftrightarrow e^{x-1}>1\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Έτσι ο πίνακας μεταβολών είναι :

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
f'	$-$	$+$
f	$\downarrow$	$\uparrow$
	E	

Οπότε για $x=1$ έχουμε ελάχιστη τιμή $f(1)=0$ και έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι : $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1}\geq x$.

ii. Θεωρούμε την $f(x)=\ln(x-\nu+1)-x+\nu$ με $A_f=(\nu-1,+\infty)$. Για κάθε $x\in A_f$ έχουμε ότι : $f'(x)=\dfrac{1}{x-\nu+1}-1=\dfrac{\nu-x}{x-(\nu-1)}$ οπότε $f'(x)>0\Leftrightarrow \nu-x>0\Leftrightarrow x<\nu$

Έτσι έχουμε ότι :

x	ν-1 ν	$+\infty$
f'	$+$	$-$
f	$\uparrow$	$\downarrow$
	M	

Οπότε για $x=\nu$ έχουμε μέγιστη τιμή $f(\nu)=0$ και έτσι για κάθε $x>\nu-1$ είναι: $f(x)\leq 0\Leftrightarrow \ln(x-\nu+1)\leq x-\nu$.

Θέμα 21

Έστω η συνάρτηση $y=f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε ότι: $x=t^3+3t$ και $4y=3t^4$, $t\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί το τοπικό ακρότατο της f καθώς και η εξίσωση της εφαπτομένης σε αυτό.

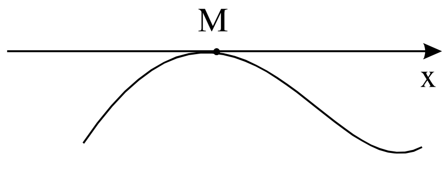
ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε την παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d\left(\frac{3}{4}t^4\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{d\left(t^3+3t\right)}{dt}}=3t^3\cdot\frac{1}{3t^2+3}=\frac{t^3}{t^2+1}$$

	0	
	$-$	$+$
	$\downarrow$	$\uparrow$
	E	

Άρα έχουμε ελάχιστο για $t=0$ το σημείο $M(0,0)$ οπότε η εφαπτομένη σ' αυτό έχει εξίσωση: $y-0=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=0\ (x'x)$.



Θέμα 22

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ και να συγκριθούν οι αριθμοί e^{π} και π^{e}.

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού είναι $A=(0,+\infty)$ οπότε για κάθε $x\in A$ έχουμε $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

Το πρόσημο της f΄ είναι : $f'(x)>0\Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow 1-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$.

Έτσι ο πίνακας μεταβολών της είναι:

x	0	e	+∞
f΄	+		–
f	↑		↓
		M	

Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=e$ την $f(e)=\frac{1}{e}$.

Οι αριθμοί e^{π},π^{e} ανήκουν στο $[e,+\infty)$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε :

$$e<\pi\overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(e)>f(\pi)\Rightarrow \frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}\Rightarrow \pi\ln e>e\ln\pi\Rightarrow \ln e^{\pi}>\ln\pi^{e}\Rightarrow e^{\pi}>\pi^{e}.$$

Θέμα 23

Να δειχθεί ότι $ημx+\frac{x^3}{6}\geq x$ για κάθε $x\geq 0$.

ΛΥΣΗ

Έστω $f(x)=ημx+\frac{x^3}{6}-x$ με $A=[0,+\infty)$. Για κάθε $x\in A$ έχουμε ότι $f'(x)=συνx+\frac{x^2}{2}-1$ και $f''(x)=-ημx+x$. Η f΄΄ έχει μοναδική ρίζα $x=0$.

Έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $|ημx|\leq|x|$. Όμως για $x\geq 0$ είναι :

$|ημx|\leq|x|\Leftrightarrow -x\leq ημx\leq x$. Άρα $x-ημx>0$ για $x\in(0,+\infty)$. Άρα για x>0 έχουμε ότι: $f''(x)>0\Leftrightarrow (f'(x))'>0$, οπότε η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

0	+∞
f΄ ↑	

Η f΄ μηδενίζεται μόνο για $x=0$ οπότε για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι :

$f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$ άρα η $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$

0	$+\infty$
$f\uparrow$	

Έτσι έχουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 για κάθε $x \ge 0 \Rightarrow f(x) \ge f(0) \Rightarrow f(x) \ge 0$

Θέμα 24

Να βρεθεί ο μεγαλύτερος $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $e^x \ge \alpha x^e$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών του α λύνοντας ως προς α και έχουμε:

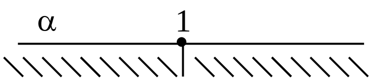
$e^x \ge \alpha x^e \Leftrightarrow \alpha \le \dfrac{e^x}{x^e}$ για κάθε x>0. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{x^e}$ με $x \in (0,+\infty)$. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f. Για $x > 0$ είναι :

$$f'(x) = \frac{e^x x^e - e^x e x^{e-1}}{\left(x^e\right)^2} = \frac{e^x x^{e-1}(x-e)}{x^{2e}} = \frac{e^x(x-e)}{x^{e+1}}$$

0	e	$+\infty$
–	+	
$\downarrow$	$\uparrow$	

Ε

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x = e την τιμή $f(e) = \dfrac{e^e}{e^e} = 1$ άρα για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι $f(x) \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x^e} \ge 1$



Άρα ο $\alpha \le 1$ οπότε η μεγαλύτερη τιμή του α είναι 1.

Θέμα 25

Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in (2\alpha, 2\beta)$ ισχύει :

$$(x-2\alpha)^{x-2\alpha} \cdot (2\beta - x)^{2\beta - x} \ge (\beta - \alpha)^{2(\beta-\alpha)}$$

ΛΥΣΗ

Λογαριθμίζοντας τη ζητούμενη σχέση αποκαλύπτουμε τη συνάρτηση που πρέπει να εργαστούμε.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = (x-2\alpha)\ln(x-2\alpha) + (2\beta - x)\ln(2\beta - x)$ με $x \in (2\alpha, 2\beta)$.

Για κάθε $x \in (2\alpha, 2\beta)$ έχουμε ότι :

$$f'(x) = \ln(x-2\alpha) + 1 - \ln(2\beta - x) - 1 = \ln\frac{x-2\alpha}{2\beta - x}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\frac{x-2\alpha}{2\beta-x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2\alpha}{2\beta-x} > 1 \Leftrightarrow x > \alpha+\beta .$$

Έτσι ο πίνακας μεταβολών είναι :

x	2α	α + β	2β
f′	–		+
f	↓		↑

E

Άρα για $x = \alpha + \beta$ η f έχει ελάχιστη τιμή

$f(\alpha+\beta) = 2(\beta-\alpha)\ln(\beta-\alpha) = \ln(\beta-\alpha)^{2(\beta-\alpha)}$ οπότε για κάθε $x \in (2\alpha, 2\beta)$ είναι :

$$f(x) \geq f(\alpha+\beta) \Leftrightarrow \ln(x-2\alpha)^{(x-2\alpha)} + \ln(2\beta-x)^{(2\beta-x)} \geq \ln(\beta-\alpha)^{2(\beta-\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left((x-2\alpha)^{(x-2\alpha)} \cdot (2\beta-x)^{(2\beta-x)}\right) \geq \ln(\beta-\alpha)^{2(\beta-\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$(x-2\alpha)^{x-2\alpha} \cdot (2\beta-x)^{2\beta-x} \geq (\beta-\alpha)^{2(\beta-\alpha)} .$$

Θέμα 26

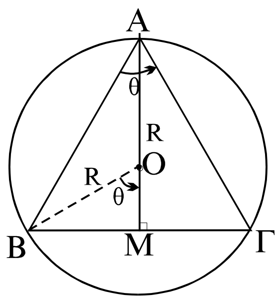
i. Από όλα τα ισοσκελή τρίγωνα που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R, ποιο είναι εκείνο στο όποιο η βάση και το ύψος έχουν το μέγιστο άθροισμα ;
ii.Αν θ η γωνία των ίσων πλευρών πότε το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται μέγιστο. Δίνεται ότι $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ΛΥΣΗ

i) Έστω η βάση (ΒΓ)= 2x και (ΟΑ) = (ΟΒ) = R τότε έχουμε :

$$S(x) = (B\Gamma) + (AM) = 2x + R + (OM) = 2x + R + \sqrt{R^2 - x^2}$$

με $x \in (0, R)$ οπότε είναι:



$$S'(x) = 2 + \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2\sqrt{R^2-x^2} - x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

Έχουμε ότι :

$$S(x) > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{R^2-x^2} > x \Leftrightarrow 4R^2 > 5x^2 \Leftrightarrow x < \frac{2R}{\sqrt{5}}$$

0	$\frac{2R}{\sqrt{5}}$	R
	+	-
	↑	↓

$M_{ολ}$

Έτσι το άθροισμα μεγιστοποιείται για $x = \frac{2R}{\sqrt{5}}$

ii) Αν ϑ η γωνία των ίσων πλευρών τότε έχουμε : $B\hat{O}M = \vartheta$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο BOM έχουμε : $(OM) = R\sigma\upsilon\nu\vartheta,\ (BM) = R\eta\mu\vartheta$ οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι :

$E(\vartheta) = \frac{1}{2}2(BM)(R + OM) = R\eta\mu\vartheta(R + R\sigma\upsilon\nu\vartheta)$ με $\vartheta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Οπότε $E'(\vartheta) = R^2\left(\sigma\upsilon\nu\vartheta(1 + \sigma\upsilon\nu\vartheta) - \eta\mu^2\vartheta\right) = 2R^2(\sigma\upsilon\nu\vartheta + 1)\left(\sigma\upsilon\nu\vartheta - \frac{1}{2}\right)$

0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	+	-
	↑	↓

Έτσι το εμβαδόν μεγιστοποιείται για γωνία $\vartheta = \frac{\pi}{3}$.

Θέμα 27

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^{\lambda x}} - 1 + \lambda\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f να έχει μέγιστο (ολικό) την αρχή των αξόνων.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $f'(x) = -\frac{\lambda e^{\lambda x}}{e^{2\lambda x}} + \lambda\frac{e^x}{e^{2x}} = -\frac{\lambda}{e^{\lambda x}} + \frac{\lambda}{e^x} = \lambda \cdot \frac{e^{\lambda x} - e^x}{e^{(\lambda+1)x}}$.

i) Είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \lambda\left(e^{\lambda x} - e^x\right) > 0$ (1)

Αν $\lambda < 0$ έχουμε

$(1) \Leftrightarrow e^{\lambda x} - e^x < 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x} < e^x \Leftrightarrow \lambda x < x \Leftrightarrow (\lambda - 1)x < 0 \Leftrightarrow \underset{\lambda<0}{\overset{\lambda-1<0}{\Leftrightarrow}} x > 0$ δηλαδή

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
f′	–	+
f	↓	↑

ο.ε.

ii) Αν $0<\lambda<1$ έχουμε $(1)\Leftrightarrow e^{\lambda x}>e^{x}\Leftrightarrow \lambda x>x\Leftrightarrow(\lambda-1)x>0\underset{\lambda-1<0}{\overset{\lambda<1}{\Leftrightarrow}}x<0$ δηλαδή

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄	+		−
f	↑		↓

ο.μ.

iii) Αν $\lambda>1$ έχουμε $(1)\Leftrightarrow(\lambda-1)x>0\underset{\lambda-1>0}{\overset{\lambda>1}{\Leftrightarrow}}x>0$ δηλαδή

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄	−		+
f	↓		↑

ο.ε.

iv) Αν $\lambda=1$ τότε $f(x)=0$ σταθερή.

v) Αν $\lambda=0$ τότε $f(x)=0$ σταθερή

Άρα για να έχει η f ολικό μέγιστο το σημείο $O(0,0)$ πρέπει $0\le\lambda\le1$.

Θέμα 28

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x)e^{f(x)}=e^{x}$ και $f(\mathrm{A})=\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x)=x+\ln x$. Η f' έχει ακρότατο;

ΛΥΣΗ

Παραγωγίζοντας είναι $f'(x)\cdot e^{f(x)}\cdot(1+f(x))=e^{x}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+1}>0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathrm{A}=\mathbb{R}$ και υπάρχει η $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Θέτουμε στην υπόθεση όπου x το $f^{-1}(x)$ άρα $f^{-1}(x)=x+\ln x$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=\dfrac{1}{\left(f(x)+1\right)^{2}}>0$ άρα δεν έχει ακρότατο.

Θέμα 29

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\ln\sqrt[3]{x} = ex^{-3}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,+\infty)$.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση γράφεται : $\ln\sqrt[3]{x} = ex^{-3} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{3} = \frac{e}{x^3} \Leftrightarrow x^3 \ln x - 3e = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 \ln x - 3e,\ x \in (0,+\infty)$.

Είναι: $f'(x) = \left(x^3 \ln x - 3e\right)' = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(3\ln x + 1),\ x > 0$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{3}}$. Δηλαδή:

x	0	$e^{-\frac{1}{3}}$	$+\infty$
f′	‖	–	+
f	‖	↓	↑
		ο.ε.	

Ακόμα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3 \ln x - 3e\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} - 3e \overset{L©Hospital}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3x^2}{x^6}} - 3e =$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x^3\right) - 3e = -3e$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3 \ln x - 3e\right) = +\infty$

Το ολικό ελάχιστο της f είναι το $f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{9e^2+1}{3e}$.

Αφού η f είναι συνεχής στα $\left(0, e^{-\frac{1}{3}}\right]$ και $\left[e^{-\frac{1}{3}}, +\infty\right)$ και γνήσια φθίνουσα και γνήσια αύξουσα αντίστοιχα τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα :

$\Delta = \left[-\frac{9e^2+1}{3e}, -3e\right) \cup \left[-\frac{9e^2+1}{3e}, +\infty\right) = \left[-\frac{9e^2+1}{3e}, +\infty\right)$.

Εφόσον το σύνολο τιμών της f περιέχει την τιμή 0 θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(e^{-\frac{1}{3}}, +\infty\right)$ με $f(x_0) = 0$ και αφού η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\left[e^{-\frac{1}{3}}, +\infty\right)$ η x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln\sqrt[3]{x} = ex^{-3}$ στο $\left[e^{-\frac{1}{3}}, +\infty\right)$.

Η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο $\left(0, e^{-\frac{1}{3}}\right)$ γιατί $f(x) < 0,\ x \in \left(0, e^{-\frac{1}{3}}\right)$.

Άρα η εξίσωση $\ln\sqrt[3]{x} = ex^{-3}$ έχει μόνο μία ρίζα $x_0 \in \left(e^{-\frac{1}{3}}, +\infty\right)$.