Θέμα 65

Έστω f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει ότι $f\left(f\left(x\right)\right)+f\left(x\right)=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f\left(1\right)=1$, $f'\left(1\right)\neq-2$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λυθεί η ανίσωση $f\left(e^x\right)-f\left(x\right)>2\left(x-e^x\right)$.

γ) Να δείξετε ότι $f\left(x\right)=x,\ x\in\mathbb{R}$.

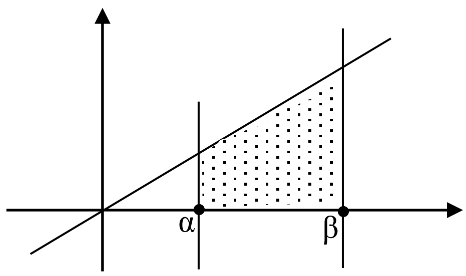
δ) Έστω Ε το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στην f τον άξονα x΄x και τις ευθείες στην x = α , x = β με β > α > 0. Αν οι α , β αυξάνονται με ρυθμό 3 και 2 min/sec αντίστοιχα, να βρεθεί πότε το εμβαδόν Ε θα μηδενιστεί και στη συνέχεια να βρεθεί η στιγμή που γίνεται μέγιστο.

Δίνεται ότι $\alpha\left(0\right)=1$, $\beta\left(0\right)=2$.

ΛΥΣΗ

α) Παραγωγίζοντας έχουμε ότι:

$$f'\left(f\left(x\right)\right)f'\left(x\right)+f'\left(x\right)=2$$



Είναι $f'\left(x\right)\neq0$ και η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$

Άρα διατηρεί πρόσημο και για x = 1 παίρνουμε

$\left(f'(1)\right)^2+f'(1)-2=0\Leftrightarrow f'(1)=1$ ή $f'(1)=-2$

Άρα $f'(1)=1>0$ οπότε $f'\left(x\right)>0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η ανίσωση γίνεται $f\left(e^x\right)+2e^x>f\left(x\right)+2x$. Θεωρούμε την $g\left(x\right)=f\left(x\right)+2x$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ $\left(g'\left(x\right)>0\right)$ οπότε $g\left(e^x\right)>g\left(x\right)\Leftrightarrow e^x>x$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Προσθέτουμε στην υπόθεση $f\left(x\right)$ και έχουμε ότι :

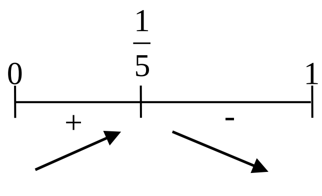
$$f\left(f\left(x\right)\right)+2f\left(x\right)=f\left(x\right)+2x\Leftrightarrow g\left(f\left(x\right)\right)=g\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=x$$

δ) $\text{Ε}=\int_\alpha^\beta f\left(x\right)dx=\int_\alpha^\beta xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$

Όμως $\alpha'\left(t\right)=3\Rightarrow\alpha\left(t\right)=3t+c$ για t = 0.

$a\left(0\right)=c\Rightarrow c=1$ οπότε $\alpha\left(t\right)=3t+1$ και $\beta\left(t\right)=2t+2$.

Άρα $\text{Ε}=\frac{1}{2}\left(-5t^2+2t+3\right)$.



Ε = 0 $\Leftrightarrow-5t^2+2t+3=0\overset{t>0}{\Leftrightarrow}t=1$

$E'\left(t\right)=\frac{1}{2}\left(-10t+2\right)$

Άρα μεγιστοποιείται σε $t=\frac{1}{5}$

Θέμα 66

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2e^x+x^2-2x-2$ **,** $g(x)=x^3+3\alpha x^2+3\alpha x+1$**, α>0**

α. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία , τα κοίλα και να δείξετε ότι $f(x)\ge 0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **.**

β. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $h_1(x)=2e^x$ **,** $h_2(x)=-x^2+2x+2$ **έχουν ένα κοινό σημείο με κοινή εφαπτομένη σε αυτό. Να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα τους και στην ευθεία x = 1.**

γ. Δίνεται ότι η εξίσωση $f\left(f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha-1\right)=0$ **έχει δυο ρίζες στο** $\mathbb{R}$ **.**

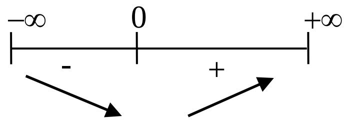
Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ **.**

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε $f'(x)=2\left(e^x+x-1\right)$, $f'(0)=0$ και $f''(x)=2\left(e^x+1\right)>0$

άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε για x > 0 η $f'(x)>0$ και για x < 0 άρα η $f'(x)<0$

άρα η f έχει ελάχιστο $f(0)=0$.



β. Έχουμε $h_1(x)=h_2(x)\Leftrightarrow f(x)=0\overset{(a)}{\Leftrightarrow}x=0$.

Άρα $h_1(0)=h_2(0)$ και $h_1'(0)=2$, $h_2'(0)=2$.

Επίσης για $x\ge 0$ είναι $h_1(x)\ge h_2(x)$ οπότε

$$\text{E}=\int_0^1\left|h_1(x)-h_2(x)\right|dx=\int_0^1\left(2e^x+x^2-2x-2\right)dx=\ldots$$

γ. Η εξίσωση $f(x)=0$ από το (α) έχει μοναδική ρίζα x = 0 οπότε η εξίσωση

$$f\left(f^2(x)+af(x)+a-1\right)=0\Leftrightarrow f^2(x)+af(x)+a-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=-1 & \text{αδύνατη}\\ \quad ή & \\ f(x)=1-\alpha & \end{cases}$$

Επειδή η εξίσωση έχει δυο ρίζες και $f(A)=[0,+\infty)$ έχουμε ότι :

$1-a>0\Leftrightarrow a<1$ άρα $0<\alpha<1$

Για $x\in\mathbb{R}: g'(x)=3\left(x^2+2\alpha x+\alpha\right)$

$\Delta=4\alpha^2-4\alpha=4\alpha(\alpha-1)<0$ άρα $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 67

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι ο $x'x$ **εφάπτεται στην f.**

β) Να δείξετε ότι $\varepsilon\phi x > x$ **για κάθε** $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ **και στη συνέχεια να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο** $\Delta=[1,+\infty)$ **.**

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία y = x είναι ασύμπτωτη των συναρτήσεων f και fof **στο** $+\infty$ **.**

δ) Να υπολογίσετε το $\mathrm{I}=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)}dx$ **.**

ΛΥΣΗ

α) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$ (Κριτήριο Παρεμβολής) και $f(0)=0$ άρα η f εφάπτεται στον x΄x στο $x_0=0$.

β) Θεωρούμε $g(x)=\varepsilon\varphi x-x$, $\mathrm{A}=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$g'(x)=1+\varepsilon\varphi^2 x-1>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο Α ,

οπότε για $x>0\Rightarrow g(x)>g(0)\Rightarrow \varepsilon\varphi x>x$.

Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ότι $f'(x)=2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}$.

Είναι $x>1\Rightarrow 0<\dfrac{1}{x}<1$ άρα $\varepsilon\varphi\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x\eta\mu\dfrac{1}{x}>\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}$ οπότε $f'(x)>0$,

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\eta\mu\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\eta\mu t-t}{t^2}=$

$\overset{DHL}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu t-1}{2t}=0$

Άρα η y = x ασύμπτωτη της f στο $+\infty$. Για τη συνάρτηση fof έχουμε ότι :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(f(x)-x\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(f(x)\right)-f(x)+f(x)-x\right)=0+0=0$

δ) Το ολοκλήρωμα γίνεται $\mathrm{I}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\eta\mu x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

Θέτουμε συνx = t οπότε $\mathrm{I}=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-t^2}dt=...$

Θέμα 68

Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathrm{A}=[0,1]$ όπου ισχύουν :

$$\left(f'(x)+1\right)\left(f'(x)-1\right)>f^2(0) \quad \textbf{και} \quad f(1)=1$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
β) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα (0,1).
γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x)\ln x=-f(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1).
δ) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(2x)-f(x)\right)\ln x\right]$.

ΛΥΣΗ

α) Αν η f δεν είναι 1 – 1 τότε υπάρχουν $\alpha\neq\beta$ ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$ και από το Θ. Rolle έχουμε ότι $f'(x_1)=0$ και η υπόθεση γίνεται $1+f^2(0)<0$ άτοπο.

β) Για $x\in A$ έχουμε $\left(f'(x)\right)^2>1+f^2(0)$ (1) . Από Θ.Μ.Τ. στο $[0,1]$ υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi)=1-f(0)$ οπότε η (1) γίνεται $-2f(0)>0\Leftrightarrow f(0)<0$ άρα από Θ. Bolzano η f έχει μοναδική ρίζα x_0 διότι είναι και 1 – 1 .

γ) Η εξίσωση είναι : $f'(x)\ln x+\frac{1}{x}f(x)=0\Leftrightarrow\left(f(x)\ln x\right)'=0$

Θεωρούμε $\varphi(x)=f(x)\ln x$ που εφαρμόζει το Θ. Rolle στο $[x_0,1]$.

δ) Το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(2x)-f(x)}{x}x\ln x\right]=\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)+f(0)-f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{DLH}{=}$$

$$=\left(2\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x}-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=f'(0)\cdot 0=0$$

Θέμα 69

Έστω ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(\alpha-1)<f'(x)<f(\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η $g(x)=f(x)-f(\alpha-1)x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το $f(\mathrm{A})$.

γ) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-f^2(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

δ) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $0\le g(x)\le f^2(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι η g εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha-1,\alpha]$ οπότε $f'(\xi)=f(\alpha)-f(a-1)$,
όμως $f'(\xi)<f(\alpha)\Rightarrow f(\alpha-1)>0$ άρα $f'(x)>0\Rightarrow$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathrm{A}=\mathbb{R}$.

β) $g'(x)=f'(x)-f(a-1)>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,
άρα $x>0\Rightarrow g(x)>g(0)\Rightarrow f(x)-f(a-1)x>f(0)\Rightarrow f(x)>f(a-1)x+f(0)$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(a-1)x+f(0)\right)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ όμοια $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.
Άρα $f(A)=\mathbb{R}$.

γ) Έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^2(x)\left(\dfrac{1}{f(x)}-\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{f(x)}-\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}}{\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^2}=$

$$\overset{\frac{1}{f(x)}=t}{=}\lim_{t\to0}\frac{t-\eta\mu t}{t^2}\underset{DHL}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{t\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu t}{2t}\overset{DHL}{=}0 .$$

δ) Επειδή $f(A)=\mathbb{R}$ η f έχει μοναδική ρίζα x_0 δηλαδή $f(x_0)=0$ οπότε και $g(x_0)=0$. Είναι για κάθε $x\in\mathbb{R}$: $g(x)\ge0\Leftrightarrow g(x)\ge g(x_0)$ οπότε η g έχει ελάχιστο στο x_0 και από το Θ. Fermat έχουμε ότι : $g'(x_0)=0$ άρα η g είναι εφαπτομένη στον $x'x$.

Θέμα 70

Έστω f κυρτή στο $A=\mathbb{R}$ όπου η f' είναι συνεχής στο A και έχει όριο στο $+\infty$.
Αν η $y=\alpha x+\beta$ $(a\neq 0)$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$:
α) Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)=f'(x)-\alpha$ είναι $g(A)=(\ell_1,0)$.
β) Να δείξετε ότι η $f(x)>ax+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) Η f κυρτή στο A άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο A οπότε και η g είναι γνησίως αύξουσα στο A συνεπώς $g(A)=\left(\ell_1,\lim_{x\to+\infty}g'(x)\right)$.

Από την ασύμπτωτη παίρνουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$.

Όμως $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}x\right)=\pm\infty$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha\overset{DLH}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}\left(f'(x)-\alpha\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}g'(x)=0$$

Άρα $g(A)=(\ell_1,0)$ δηλαδή $g(x)<0$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-\alpha x-\beta$ με $A=\mathbb{R}$ και είναι $h'(x)=f'(x)-a=g(x)<0$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο A άρα $h(A)=\left(\lim_{x\to+\infty}h(x),\ell_2\right)=(0,\ell_2)$ οπότε $h(x)>0\Rightarrow f(x)>ax+\beta$.

Θέμα 71

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει ότι :

$$xf'(x)=f(x)+x^2\left(e^x-1\right)\quad \textbf{για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad \textbf{και}\quad f(1)=e-1$$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=xe^x-x^2$, $x\in\mathbb{R}$.
β) Να βρείτε το σημείο καμπής της f και να δείξετε ότι για κάθε x > 0 :

$$xe^x\geq(e-1)(2x-1)+x^2$$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το όριο : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu f(x)+\sigma\upsilon\nu f(x)}{f(x)}$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στην C_f , την εφαπτομένη στο σημείο καμπής και την ευθεία x = 1 .

ΛΥΣΗ

Επαναληπτικά Θέματα

α) Για $x \neq 0$ έχουμε $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \left(e^x - x\right)'$ άρα για x > 0 :

$\frac{f(x)}{x} = e^x - x + c_1 \Leftrightarrow f(x) = xe^x - x^2 + c_1 x$

$f(1) = e - 1$ άρα $c_1 = 0$

Για x = 0 η υπόθεση δίνει $f(0) = 0$. Για x < 0 είναι $f(x) = xe^x - x^2 + c_2 x$.

Όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow c_2 = 0$ άρα $f(x) = xe^x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (x+1)e^x - 2x$, $f''(x) = (x+2)e^x - 2$ και $f'''(x) = (x+3)e^x$, $f'''(x) > 0 \Leftrightarrow x > -3$ άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3, +\infty)$ και το 0 είναι μοναδική της ρίζα και αλλάζει πρόσημο.

Αν $\mathrm{A}_1 = (-\infty, -3]$ τότε $f''(\mathrm{A}_1) = \left(-2, -e^{-3} - 2\right]$ άρα για x < 0 είναι $f''(x) < 0$ και η f έχει ένα σημείο καμπής το O(0,0).

Η f είναι κυρτή στο $\mathrm{A} = [0, +\infty)$ άρα πάνω από την εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ και προκύπτει το ζητούμενο.

γ) Η f' έχει ελάχιστο $f'(0) = 1 > 0$ άρα $f'(x) > 0$ για $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathrm{A} = \mathbb{R}$ και έχει $f(\mathrm{A}) = \mathbb{R}$ διότι

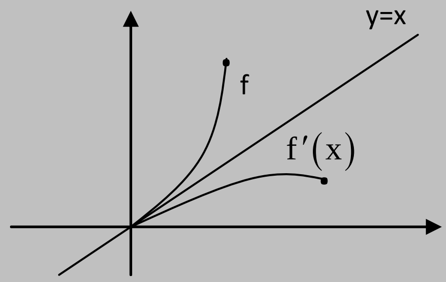
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(xe^x - x^2\right) \overset{DLH}{=} -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x^2\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)\right] = +\infty$$

δ) Η εφαπτομένη είναι η y = x οπότε $\mathrm{E} = \int_0^1 \left|f(x) - x\right| dx = \int_0^1 \left(xe^x - x^2 - x\right) dx = \ldots$

Θέμα 72

Έστω ότι $f''(x)>0$ **για κάθε** $x\in A=[0,1]$ **με** $f(0)=0$, $f(1)=2$, $f'(0)=1$.



Με βάση το παραπάνω σχήμα να δείξετε ότι :

1) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και $f(A)=[0,2]$.

2) Η ευθεία y = x εφάπτεται στην f.

3) Υπάρχει $x_0\in A$ **ώστε** $f''(x_0)>1$.

4) $\dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{2-f(x)}{1-x}$ **για κάθε** $x\in(0,1)$.

5) $f(x)\le 2x$ **για κάθε** $x\in A$ **και** $\int_0^1 f(x)dx<1$, $2\int_0^1 f^2(x)dx<f^2(0)+f^2(1)$.

6) Η ευθεία $\varepsilon: y=-x+1$ **τέμνει την** C_f **άλλα δεν εφάπτονται .**

7) Υπάρχουν $x_1,x_2\in A$ **με** $x_1<x_2$ **ώστε** $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=f'(x_1)+2$.

8) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ **και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f ,** f^{-1}.

9) Σημείο M(x,y) κινείται στην f . Σε ποια θέση της C_f **ισχύει ότι :**

$$y'(t)=x'(t)\left(x'(t)\neq 0\right)$$

10) Οι συναρτήσεις f και f^{-1} **έχουν κοινή εφαπτομένη στο 0(0,0)** $\left(f^{-1}\ \text{παραγωγισιμη}\right)$

11) Αν η g είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $\mathbb{R}$ **ώστε να ισχύει** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-x}{x-2}=g(2)-2$ **να δείξετε ότι οι f , g έχουν κοινή εφαπτομένη και ισχύει ότι** $f(x)\ge x\ge g(x)$

12) Αν η κατακόρυφη απόσταση των f , g ελαχιστοποιείται στα σημεία **K**$(\alpha,f(\alpha))$, $\Lambda(\alpha,g(\alpha))$, **να δείξετε ότι οι εφαπτομένες στα K , Λ είναι παράλληλες.**

13) Αν $f^{-1}(F(1))=f^{-1}(F(0)+1)$ **όπου F παράγουσα της f να δείξετε ότι η** C_f **χωρίζει ισεμβαδικά το ορθογώνιο με κορυφές** $0(0,0)$, **A(1,0)** , $B(1,2)$, $\Gamma(0,2)$,

14) Η C_f **τέμνει την διαγώνιο ΑΓ του ορθογωνίου ΟΑΒΓ.**

15) $\int_0^1 f(x)dx + \int_0^2 f^{-1}(x)dx = 2$ **, (** f^{-1} **συνεχής στο** $f(A)$**)**

16) Να δείξετε ότι $f(\eta\mu^2 x) + x^2 \le f(x^2) + \eta\mu^2 x$

17) Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία συνευθειακα σημεία στην f .

ΛΥΣΗ

1) Εφόσον $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in A = [0,1]$ τότε η f' γνησίως αύξουσα στο Α. Για κάθε $x \in A$ με $x \ge 0 \overset{f''}{\Rightarrow} f'(x) \ge f'(0) \Rightarrow f'(x) \ge 1$ άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ επομένως η f γνησίως αύξουσα στο Α.
Επειδή η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Α το σύνολο τιμών της είναι :

$$f(A) = [f(0), f(1)] = [0,2]$$

2) Η εφαπτομένη ευθεία στο x=0 έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x$.

3) Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[0,1]$ άρα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi) = 2$

Η f' ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[0,\xi]$ άρα υπάρχει $x_0 \in (0,\xi) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε :

$$f''(x_0) = \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 1} \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{1}{\xi} > 1 \text{ διότι } 0 < \xi < 1 \Rightarrow \frac{1}{\xi} > 1$$

4) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την f στο $[0,x]$ άρα υπάρχει $\xi_1 \in (0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \dfrac{f(x)}{x}$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την f στο $[x,1]$ άρα υπάρχει $\xi_2 \in (x,1)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{2-f(x)}{1-x}$$

Με βάση τα παραπάνω $\xi_1 < \xi_2 \overset{f''}{\Rightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} < \dfrac{2-f(x)}{1-x}$ για κάθε $x \in (0,1)$ άρα $\dfrac{f(x)}{x} < \dfrac{2-f(x)}{1-x}$ για κάθε $x \in (0,1)$

5) Για $x = 0$ και $x = 1$ ισχύει η ισότητα δηλαδή : $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$

Εφόσον $\dfrac{f(x)}{x} < \dfrac{2-f(x)}{1-x}$ για κάθε $x \in (0,1)$ έχουμε :

$$(1-x)f(x)<x(2-f(x))\Leftrightarrow f(x)-xf(x)<2x-xf(x)\Leftrightarrow f(x)<2x$$

Άρα $f(x)\le 2x$ για κάθε $x\in[0,1]$ Ισχύει : $f(x)-2x\le 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$ και $x=1$ επομένως

$$\int_0^1(f(x)-2x)<0\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 2xdx<0\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx<\left[x^2\right]_0^1\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx<2$$

6) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x-1, x\in[0,1]$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $h(0)=f(0)+0-1=-1<0$, $h(1)=f(1)+1-1=2>0$

άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=-x+1$ έχει μια τουλάχιστον λύση δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $y=-x+1$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο. Για να εφάπτεται η $y=-x+1$ θα πρέπει στο σημείο που τέμνει την γραφική παράσταση της f την ευθεία να ισχύει $f'(x_0)=-1$ άτοπο διότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

7) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ στα διαστήματα $[0,x_0]$ και $[x_0,1]$ όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος (6). Υπάρχουν $x_1\in(0,x_0), x_2\in(x_0,1)$ τέτοια ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{1-x_0}{x_0} \text{ και } f'(x_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{1+x_0}{1-x_0}$$

$$f'(x_1)\cdot f'(x_2)=\frac{1-x_0}{x_0}\cdot\frac{1+x_0}{1-x_0}=\frac{1+x_0}{x_0} \text{ και } f'(x_1)+2=\frac{1-x_0}{x_0}+2=\frac{x_0+1}{x_0}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο .

8) Η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)=x$ με $x\in A\cap f(A)$
Η εξίσωση $f(x)=x$ έχει προφανή και μοναδική ρίζα την $x=0$ η οποία ανήκει στο πεδίο ορισμού της αντίστροφης το οποίο είναι το σύνολο τιμών της f .

9) Έχουμε διαδοχικά :
$$\begin{aligned}&y(t)=f(x(t))\Rightarrow y'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)\Rightarrow 1=f'(x(t))\\&\Rightarrow f'(0)=f'(x(t))\Rightarrow x(t)=0\end{aligned}$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης στην αρχή των αξόνων.

10) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0,0)$ είναι η $(\varepsilon): y=x$ ενώ της $C_{f^{-1}}$ είναι η : $y-f^{-1}(0)=\left(f^{-1}\right)'(0)(x-0)$ (1) Ισχύει : $f^{-1}(0)=0$ και :

$$f^{-1}(f(x))=x\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))\cdot f'(x)=1\overset{f'(x)\neq 0}{\Rightarrow}\left(f^{-1}\right)'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}.$$ Για $x=0$

έχουμε : $\left(f^{-1}\right)'(f(0))=\dfrac{1}{f'(0)}\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'(0)=1$ Άρα η (1) γίνεται : $y=x$ οπότε έχουν κοινή εφαπτομένη .

11) Θέτουμε $\varphi(x)=\dfrac{g(x)-x}{x-2}, x\neq 2$ με $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)=g(2)-2$

Επομένως $g(x)=(x-2)\varphi(x)+x,\ x\neq 2$.Η g παραγωγίσιμη άρα και συνεχής άρα : $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[(x-2)g(x)+x\right]\Rightarrow g(2)=2$

$$g'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\varphi(x)(x-2)+x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\varphi(x)+1)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(\varphi(x)+1)=g(2)-1=2-1=1$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο $x_0=2$ είναι:

$y-g(2)=g'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-2=x-2\Leftrightarrow y=x$

Η $y=x$ είναι και η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $O(0,0)$

Η f κυρτή στο A άρα : $f(x)\geq x$ για κάθε $x\in A$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$ (σημείο επαφής)

Η g κοίλη στο R άρα : $g(x)\leq x$ για κάθε $x\in R$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$ (σημείο επαφής) άρα $f(x)\geq x\geq g(x)$ για κάθε $x\in A$.

12) Η κατακόρυφη απόσταση είναι ίση : $d=\left|f(x)-g(x)\right|\overset{f(x)\geq g(x)}{=}f(x)-g(x)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $d(x)=f(x)-g(x)$ η οποία στο $x=\alpha$ έχει ελάχιστο είναι παραγωγίσιμη στο $x=\alpha$ και είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού της άρα από θεώρημα Fermat ισχύει : $d'(\alpha)=0$ Όμως $d'(x)=f'(x)-g'(x)$ άρα λόγω της $d'(\alpha)=0$ προκύπτει $f'(\alpha)=g'(\alpha)$ δηλαδή οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στα σημεία Κ και Λ είναι παράλληλες .

13) $f^{-1}(F(0)+1)=f^{-1}(F(1))\overset{f^{-1}:1-1}{\Rightarrow}F(0)+1=F(1)\Rightarrow F(1)-F(0)=1$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΑΒΓ είναι : $(ΟΑΒΓ)=2$τ.μ και η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο ορθογώνιο και το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0, x=1$ είναι

$$E=\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=1=\frac{(ΟΑΒΓ)}{2}\ .$$

14) Η διαγώνιος ΑΓ βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y=-2x+2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $p(x)=f(x)+2x-2$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $p(0)\cdot p(1)<0$ διότι : $p(0)=f(0)+2\cdot 0-2=-2$ και

$p(1)=f(1)+2x-2=2+4-2=4$ άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση

$p(x)=0\Leftrightarrow f(x)=-2x+2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=-2x+2$ σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(0,1)$

15) Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Rightarrow x=f(u)$ άρα $dx=f'(u)du$

Για $x=0$ $f(u)=0\Rightarrow f(u)=f(0)\overset{f:1-1}{\Rightarrow} u=0$

Για $x=2$ $f(u)=2\Rightarrow f(u)=f(1)\overset{f:1-1}{\Rightarrow} u=1$ Άρα

$$\int_0^2 f^{-1}(x)dx=\int_0^1 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=1f(1)-0\cdot f(0)-\left[F(1)-F(0)\right]=1$$

Επίσης $\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=1$ Άρα $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^2 f^{-1}(x)dx=2$

16) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x, x\in[0,1]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $h'(x)=f'(x)-1\geq 0$ και η ισότητα ισχύει για $x=0$ άρα η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα . Ισχύει : $|\eta\mu x|\leq|x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x\leq x^2$

Επειδή η h γνησίως αύξουσα :

$$h\left(\eta\mu^2 x\right)\leq h\left(x^2\right)\Leftrightarrow f\left(\eta\mu^2 x\right)-\eta\mu^2 x\leq f\left(x^2\right)-x^2\Leftrightarrow f\left(\eta\mu^2 x\right)+x^2\leq f\left(x^2\right)+\eta\mu^2 x$$

17) Έστω $A(\alpha,f(\alpha)),B(\beta,f(\beta))$ και $\Gamma(\gamma,f(\gamma))$ τρία σημεία της C_f τα οποία είναι συνευθειακά . τότε $\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}\Rightarrow\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$

Εφαρμόζοντας στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$ Θ.Μ.Τ υπάρχουν

$x_1\in(\alpha,\beta), x_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}, f'(x_2)=\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$

Δηλαδή : $f'(x_1)=f'(x_2)$ άτοπο διότι επειδή η f κυρτή τότε η f' θα είναι γνησίως αύξουσα ή εφαρμόζοντας θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[x_1,x_2]$ θα προκύψει $f''(x_3)=0$ που είναι επίσης άτοπο διότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in A$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x\ln x-\ln x-x+1$ με $A=(0,+\infty)$.

i) Να βρεθούν τα ακρότατα , τα κοίλα και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

ii) Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει : $x^{2x-1}\geq e^{x-1}$

iii) Να βρείτε το εμβαδόν ανάμεσα στην f και την $\phi(x)=\ln x$.

iv) Αν για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $\alpha^{f(x)-2}+\beta^{-f(x)+2}\geq 2$, να δείξετε ότι $\alpha=\beta$.

Έστω $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(0)=0$. Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $A=[0,\alpha]$, να δειχθεί ότι:

i) Υπάρχει $\xi\in(0,x)$ ώστε : $f'(\xi)=\dfrac{f(x)}{x}$.

ii) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta=(0,\alpha]$.

iii) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{e^{3x}+e^{2x}+e^{x}-3}{x}$ έχει μέγιστη τιμή στο διάστημα $(0,1]$.

Έστω πολυωνυμική μη σταθερή συνάρτηση f και F μια παράγουσα της στο $A=[0,+\infty)$ όπου $f'(x)f(x)=18F(x)$ για $x\geq 0$ και $f(0)=0$, $\int_0^1 f(x)dx=1$

α) Να δείξετε ότι η f είναι δευτέρου βαθμού και $f(x)=3x^2$, $x\geq 0$.

β) Να δείξετε ότι $4e^x\geq f(x)+3$ για κάθε $x\geq 0$.

γ) Να λύσετε την $e^{\eta\mu x}(x^2+1)<e^x(2-\sigma\upsilon\nu^2 x)$ για $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στις f , f' , F .

Έστω f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $f(x)-f(-x)\geq 0$ για $x\in[0,1]$ και ότι $\int_{-1}^{1} xf(x)dx>0$.

ii) Αν g συνεχής και γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι : $\int_{-1}^{1} xg(g(x))dx>0$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2-x+\beta$.

i) Αν x_1, x_2 οι θέσεις τοπικών ακρότατων της f , να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ να είναι συμμετρικά ως προς το $O(0,0)$.

ii) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_{x_1}^{x_2}(f(x))^{2\nu+1}dx$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

i) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$, να δείξετε ότι :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)dx=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx.$$

ii) Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύει $2f(x)+3f(-x)=\frac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το ολοκλήρωμα : $I=\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Έστω f παραγωγίσιμη στο $A=[0,2]$ με $f(0)=f(2)>0$ και $\int_{0}^{2} f(x)dx=0$, να δείξετε ότι η f έχει 2 τουλάχιστον ρίζες στο (0, 2) και ότι υπάρχει

$$\xi\in(0,2):\quad f'(\xi)=f(\xi).$$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

i) Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία ε: $y=\alpha$ να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α , β.

ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_{0}^{1}\frac{x}{f(x)-1}dx$.

i) Να βρεθεί η μονοτονία και το σύνολο τιμών της $f(x)=\frac{2x^3+2x+1}{x^2+1}$.

ii) Να λυθεί η εξίσωση : $2e^x-2(x+1)=\frac{1}{x^2+2x+2}-\frac{1}{e^{2x}+1}$

iii) Αν η F είναι παράγουσα της $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, να δείξετε ότι $F(\varepsilon\phi x)-F(0)=x$.

iv) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στην C_f , την ασύμπτωτη στο $+\infty$, την $x=0$ και την $x=1$.

• Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει φυσικός $\nu\in\mathbb{N}^*$ ώστε $x^\nu\le\nu^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

• Έστω f, g παραγωγίσιμες στο $A=[\alpha,\beta]$. Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο A ενώ η g κάτω στο A , να δειχθεί ότι τέμνονται το πολύ δύο φορές στο A.

• Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=2e^x-x^2-2$ και η παραγωγίσιμη f στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει : $2e^{f(x)}=f^2(x)+2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να βρεθεί η μονοτονία και οι ρίζες της g

ii) Να δειχθεί ότι $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\ge 0$ και στη συνέχεια $\int_0^1 e^{x^2}dx>\dfrac{11}{10}$

iii) Να βρεθεί το σημείο καμπής της f και να δειχθεί ότι : $f(x)\le x-1$ για κάθε $x\ge 1$

• Έστω f, g συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με f συνεχή και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+2x}{x-1}=1$ και $\eta\mu\big(f(0)-1\big)=f(0)-1$. Αν η fog είναι αντιστρέψιμη τότε:

α) Να δείξετε ότι $f(0)=1$ και $f(1)=-2$ και στη συνέχεια ότι η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

β) Να δείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια ότι η εξίσωση $g\big(f^2(x)+f(x)\big)=g(x)$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(0,1)$.

γ)Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της f στο $x=1$ εφάπτεται στην $g(x)=e^x-2x-2$.

• Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^1 \varepsilon\varphi(xt)\,dt$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

i) Να μελετηθεί η f ως προς τη συνέχεια και τη μονοτονία.

ii) Αν $\alpha<\beta$ με $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, να δείξετε ότι : $(\sigma\upsilon\nu\alpha)^\beta>(\sigma\upsilon\nu\beta)^\alpha$

• Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\int_0^1 \sigma\upsilon\nu(xt)\,dt$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

i) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής. ii) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

Επαναληπτικά Θέματα

ـبـ. Έστω η συνάρτηση $h(x)=2x^3+x-3$, $A=\mathbb{R}$

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών h(A) και να λυθεί η εξίσωση $2x^3+x=3$.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στις $f(x)=2\varepsilon\varphi^3 x$, $g(x)=-\varepsilon\varphi x+3$, y΄y και την $x=\frac{\pi}{4}$.

iii) Να λυθεί η εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x+2x^3=3\eta\mu x-x$